

Communications Numériques Avancées

# MIMO pour les nuls

Pascal Djiknavorian

Janvier 2006

édition révisé Janvier 2007

Laboratoire de Radio télécommunications et de Traitement du Signal



*À mes parents*

## Préface

Ce document a été écrit dans le cadre du cours de *Communications Numériques Avancées* lors de ma première session à la maîtrise en Génie Électrique au Laboratoire de Radio Télécommunications et de Traitement du Signal. Ce travail porte sur une partie des travaux de M. Jack H. Winters qui se retrouvent au sein de deux de ses articles [1, 2]. Les travaux en questions, réalisés par Winters, se trouvent à être à la base d'un concept élémentaire dans les communications sans-fil, le MIMO. Cette technique utilise de multiples antennes à la fois au transmetteur et au récepteur, ce qui permet la diversité, et ainsi, une plus grande capacité de communication d'informations tel qu'on le verra au cours du présent ouvrage. Étant donné la structure du présent document présentant la théorie en progression et faisant le tour de deux articles à la base du MIMO, j'ai choisi d'intituler le document : "MIMO pour les nuls". Notez toutefois que la théorie présentée s'adresse à des étudiants en fin d'études sous-gradués ou en début d'études gradués ainsi qu'à tout lecteurs intéressés par le sujet.

*Pascal Djiknavorian*

24 décembre 2005

## Préface pour la réédition de 2007

Cette réédition tiens compte des commentaires de l'évaluation qu'à été porté sur l'édition de 2006. Ainsi, les erreurs et incohérences devraient avoir été pratiquement toutes revues. Bien évidemment, il est toujours plausible que certaines coquilles aillent subsistées, dans cette situation, ou en cas de doute, n'hésitez pas à me les rapporter et à consulter les références.

*Pascal Djiknavorian*

24 décembre 2006

## Sommaire

La recherche dans le domaine des matrices d'antennes remonte à plusieurs décennies, mais ce n'est que récemment que l'utilisation d'antennes multiples à la fois au transmetteur et au récepteur a démontré une nette amélioration dans la capacité des communications. Les canaux MIMO, qui peuvent représenter divers environnements de transmission d'informations, permettent d'atteindre une capacité de transmission accrue et se manipulent facilement à l'aide d'algèbre vectoriel, d'où la popularité de ce modèle. Jack H. Winters, docteur en Génie Électrique de l'Université d'état de l'Ohio et chercheur du Bell Laboratories au département de recherches sur les systèmes sans-fil a été un généreux contributeur à la recherche dans le domaine. La présente porte sur une partie des travaux de Winters, plus exactement sur deux de ses publications, soit "On the Capacity of Radio Communication Systems with Diversity in a Rayleigh Fading Environment" [1], et "The Diversity Gain of Transmit Diversity in Wireless Systems with Rayleigh Fading" [2]. On procédera tout d'abord par une revue des principes fondamentaux nécessaires à la compréhension des articles, suivis par l'analyse et la reproduction des résultats des deux articles de M. Winters. Finalement, une discussion ainsi qu'une conclusion viendront conclure le tout.

Bonne lecture!

## Remerciements

Un travail comme celui-ci nécessite l'apport de plusieurs supporteurs que l'auteur se doit de remercier avec grand plaisir et gratitude. D'abord et avant tout, le Père Noël, pour tous les cadeaux, la joie et le bonheur qu'il nous apporte années après années. La famille, pour leur patience, surtout lorsque je me plaçais en isolement pour poursuivre mes travaux. Merci à Gradshteyn et Ryzhik, pour leur "Table of Integrals, Series, and Products" d'une qualité exceptionnel. Merci à Charles Aznavour, pour de la musique avec de belles mélodies et paroles. Merci à Allposters.com pour les posters *inspirational* avec petit proverbe inspirant. Enfin, merci à M. Sébastien Roy, le professeur du cours de *Communications Numériques Avancées*, pour un cours à la fois difficile et intéressant, bref, un cours rempli de défis m'ayant permis de me surpasser.

## Remerciements pour la réédition de 2007

Merçi au professeur M. Sébastien Roy pour avoir pris le temps de lire, commenter, et d'évaluer le document dans sa totalité : "Ce n'est pas tout le monde qui aurait fait cela, merci!". Il faut aussi que je remercie le Père Noël cette année aussi puisqu'il agit de façon cyclique, je dois l'en remercier de la même façon.

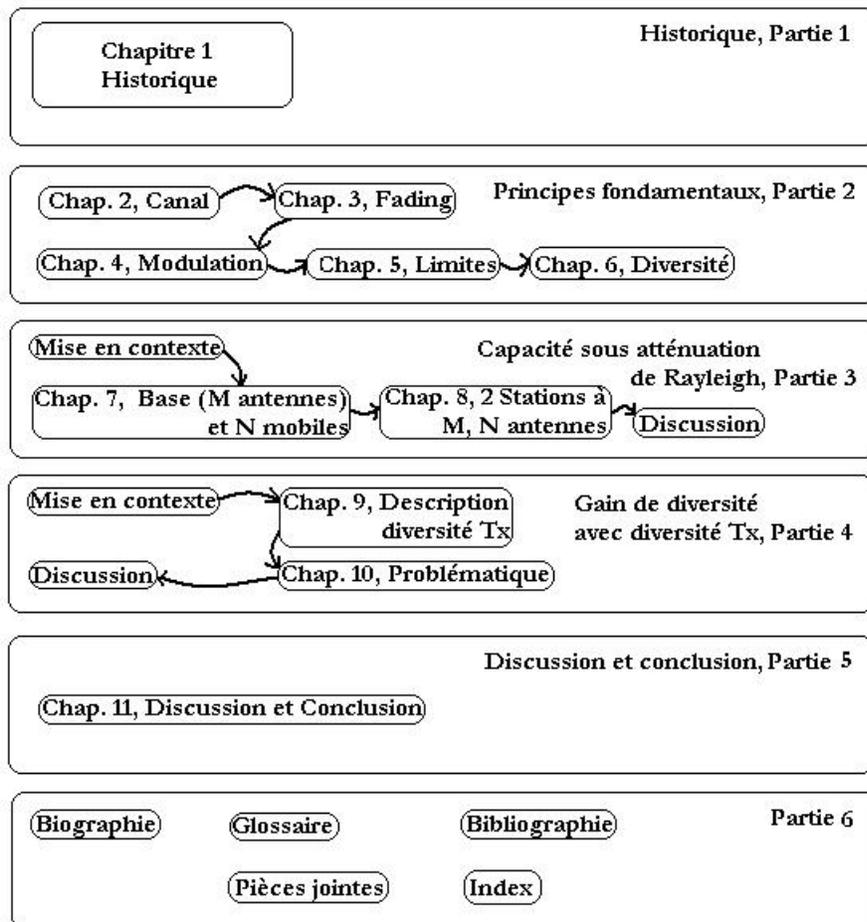


FIG. 1 – Structure du présent document

### Structure du document

Étant donné la grande quantité d'informations délivrée dans le cadre du présent document, il a été jugé approprié de vous présenter graphiquement la structure et les relations entre les chapitres. Bien entendu, pour le lecteur plus expérimenté, il lui est possible de passer directement à la partie 3.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Historique des communications</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>Historique des communications</b>	<b>15</b>
1.1	Le commencement en dix dates . . . . .	15
1.2	Le MIMO . . . . .	15
<b>II</b>	<b>Principes fondamentaux</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation d'un canal de communications</b>	<b>19</b>
2.1	Modélisation d'un canal . . . . .	19
2.1.1	Système avec entrée(s)/sortie(s) . . . . .	19
2.1.2	Système de communications . . . . .	19
2.1.3	Définition d'un canal . . . . .	19
2.1.4	Canal avec bruit additif blanc Gaussien . . . . .	20
2.1.5	Canal avec évanouissement . . . . .	21
2.1.6	Canal avec évanouissement et bruit additif blanc Gaussien . . . . .	21
2.2	Types de canal . . . . .	21
2.2.1	Modèle général . . . . .	22
2.2.2	Sélectif en fréquence . . . . .	22
2.2.3	Sélectif en temps . . . . .	23
2.2.4	Sélectif en temps et en fréquence . . . . .	23
2.2.5	Non sélectif . . . . .	23
2.3	Ligne de vue . . . . .	23
2.4	Type de dispersion . . . . .	23
2.5	Modèle de canal multiparcours . . . . .	26
2.5.1	Gain matriciel . . . . .	26
2.5.2	Gain en diversité . . . . .	27
2.5.3	Gain en multiplexage . . . . .	27
2.5.4	Réduction d'interférences . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Modélisation de l'évanouissement</b>	<b>31</b>
3.1	Fonctions de probabilité . . . . .	31
3.1.1	Fonction Gaussienne . . . . .	31
3.1.1.1	Fonction de densité de probabilité . . . . .	31
3.1.1.2	Fonction de distribution de probabilité . . . . .	31
3.1.1.3	Fonction linéaire d'une variable aléatoire Gaussienne . . . . .	33

3.1.1.4	Fonction de deux variables aléatoires conjointement gaussiennes . . . . .	33
3.1.1.5	Somme de variables aléatoires gaussiennes . . . . .	33
3.1.1.6	Théorème de la limite centrale . . . . .	33
3.1.1.7	Applications en communications de la fonction Gaussienne . . . . .	33
3.1.2	Fonction de Rayleigh . . . . .	34
3.1.2.1	Fonction de densité de probabilité . . . . .	34
3.1.2.2	Lien avec la fonction de densité gaussienne . . . . .	34
3.1.2.3	Fonction de distribution de probabilité . . . . .	35
3.1.2.4	Applications en communications de la fonction de Rayleigh . . . . .	35
3.1.3	Autres fonctions . . . . .	35
3.1.3.1	Fonction de densité de probabilité de Rice . . . . .	35
3.1.3.2	Applications en communications de la fonction de Rice . . . . .	36
3.1.3.3	Fonction de densité de probabilité de Nakagami- $m$ . . . . .	36
3.2	Types d'évanouissement . . . . .	36
3.2.1	Qu'est donc un évanouissement ? . . . . .	36
3.2.2	Types d'évanouissement . . . . .	37
3.2.2.1	Évanouissement uniforme (plat ou non-sélectif) . . . . .	37
3.2.2.2	Évanouissement rapide . . . . .	37
3.2.2.3	Évanouissement lent . . . . .	37
3.2.2.4	Évanouissement à petite échelle . . . . .	37
3.3	Évanouissement de Rayleigh . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Détection de signaux et modulation</b> . . . . .	<b>39</b>
4.1	Modulation . . . . .	39
4.1.1	Espace des signaux . . . . .	40
4.1.1.1	Signaux orthonormaux . . . . .	40
4.1.1.2	Combinaison linéaire . . . . .	40
4.1.1.3	Énergie d'un signal . . . . .	40
4.1.1.4	Orthogonalité de signal . . . . .	40
4.1.1.5	Distance euclidienne . . . . .	41
4.2	Détection de signaux . . . . .	41
4.2.1	Le détecteur de maximum à posteriori . . . . .	41
4.2.2	Le récepteur optimal pour canal à bruit additif blanc gaussien . . . . .	42
4.3	Modulation d'amplitude en quadrature . . . . .	42
4.3.1	Qu'est donc une modulation d'amplitude en quadrature ? . . . . .	42
4.3.2	Performance de la modulation d'amplitude en quadrature . . . . .	44
4.4	Probabilité d'erreur . . . . .	45
4.5	Erreur quadratique moyennée . . . . .	45
4.5.1	Qu'est donc l'erreur quadratique moyennée ? . . . . .	45
4.5.2	D'un point de vue mathématique . . . . .	45
4.5.3	D'un point de vue numérique . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Limites d'une transmission</b> . . . . .	<b>49</b>
5.1	Théorie de l'information . . . . .	49
5.1.1	Le contenu informationnel de Shannon . . . . .	49
5.1.2	Entropie . . . . .	49
5.1.3	Inférence . . . . .	49
5.1.3.1	Règle de Bayes . . . . .	49

5.1.3.2	Théorème de la probabilité totale . . . . .	50
5.1.4	Théorème du codage de Shannon . . . . .	50
5.2	Théorème sur la capacité . . . . .	50
<b>6</b>	<b>La diversité</b> . . . . .	<b>53</b>
6.1	Généralité . . . . .	53
6.2	Types de diversité . . . . .	53
6.2.1	Diversité spatiale . . . . .	53
6.2.2	Diversité de polarisation . . . . .	54
6.2.3	Diversité angulaire . . . . .	54
6.2.4	Diversité fréquentielle . . . . .	54
6.2.5	Diversité de parcours . . . . .	54
6.2.6	Diversité temporelle . . . . .	54
6.2.7	Diversité spatio-temporelle . . . . .	54
6.2.8	Diversité transformée . . . . .	55
6.2.8.1	Espace à fréquence . . . . .	55
6.2.8.2	Espace à temps . . . . .	55
6.3	Type de combinaison . . . . .	55
6.3.1	Combinaison par sélection . . . . .	55
6.3.2	Combinaison par ratio maximal . . . . .	57
6.3.3	Combinaison par gain égal . . . . .	57
<b>III</b>	<b>Capacité d'une communication sous atténuation de Rayleigh</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>7</b>	<b>Station de base à <math>M</math> antennes en présence de <math>N</math> mobiles</b> . . . . .	<b>63</b>
7.1	Description du système . . . . .	63
7.2	Traitement linéaire optimal . . . . .	65
7.2.1	Analyse de performances . . . . .	68
7.3	Traitement non linéaire optimal . . . . .	68
7.4	Capacité . . . . .	69
7.4.1	Analyse de performances . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Deux stations mobiles à <math>M</math> antennes</b> . . . . .	<b>71</b>
8.1	Description du système . . . . .	71
8.2	Traitement linéaire optimal au récepteur . . . . .	71
8.2.1	Analyse de performances . . . . .	72
8.3	Traitement linéaire optimal aux deux bornes . . . . .	72
8.3.1	Analyse de performances . . . . .	74
8.4	Capacité . . . . .	74
<b>IV</b>	<b>Gain de diversité avec la diversité de transmission</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>9</b>	<b>Description de la diversité de transmission</b> . . . . .	<b>81</b>
9.1	Description . . . . .	81
9.1.1	Délai . . . . .	81
9.1.2	Conditions du système et modélisation . . . . .	81
9.1.3	Dégradation et probabilités . . . . .	83

9.2	Résultats et analyse de performances . . . . .	84
<b>10</b>	<b>Problématique</b>	<b>87</b>
10.1	Comparaison avec d'autres techniques de diversité . . . . .	87
10.1.1	Diversité par alternance . . . . .	87
10.1.1.1	Avantages . . . . .	87
10.1.1.2	Désavantages . . . . .	87
10.1.2	Diversité avec retransmission adaptatif . . . . .	87
10.1.2.1	Avantages . . . . .	87
10.1.2.2	Désavantages . . . . .	88
10.1.3	Diversité par retransmission avec division temporelle . . . . .	88
10.1.3.1	Avantages . . . . .	88
10.1.3.2	Désavantages . . . . .	88
10.2	Avantages et désavantages de la diversité de transmission . . . . .	88
10.2.1	Avantages . . . . .	88
10.2.2	Désavantages . . . . .	89
<b>V</b>	<b>Discussion et conclusion</b>	<b>93</b>
<b>11</b>	<b>Discussion et conclusion</b>	<b>95</b>
11.1	Au sujet des résultats . . . . .	95
11.2	Au sujet des articles . . . . .	95
11.3	Conclusion . . . . .	96

# Table des figures

1	Structure du présent document . . . . .	6
2.1	Modèle d'un système simple . . . . .	19
2.2	Modèle d'un système de communications . . . . .	20
2.3	Modèle d'un canal avec bruit additif blanc gaussien . . . . .	20
2.4	Modèle d'un canal avec évanouissement . . . . .	21
2.5	Modèle d'un canal avec évanouissement et bruit additif blanc gaussien . . . . .	21
2.6	Exemple avec et sans ligne de vue . . . . .	24
2.7	Dispersion à la station mobile . . . . .	24
2.8	Dispersion à la station de base . . . . .	25
2.9	Dispersion aux deux bornes d'une communication . . . . .	25
2.10	Gain d'antennes (ou gain matriciel) avec deux Rx et un Tx . . . . .	26
2.11	Capacité du canal pour canal à évanouissements i.i.d. . . . .	28
3.1	F.D.P. d'une Gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire . . . . .	32
3.2	C.D.F. d'une Gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire . . . . .	32
3.3	P.D.F. d'une Rayleigh de variance unitaire . . . . .	34
3.4	C.D.F. d'une Rayleigh de variance unitaire . . . . .	35
4.1	Système de communication, de la séquence de bit au signal . . . . .	39
4.2	Récepteur optimal pour canal à bruit additif blanc gaussien à modulation binaire . . . . .	43
4.3	Constellation de diverses versions carrées de la modulation d'amplitude en quadrature . . . . .	43
4.4	Constellation circulaire de la modulation d'amplitude en quadrature de niveau 16 . . . . .	44
5.1	Capacité d'une transmission en fonction du SNR . . . . .	51
6.1	Schéma général du processus de combinaison . . . . .	56
7.1	Schéma d'un système de communications avec une base à $M$ antennes et $N$ mobiles . . . . .	64
7.2	Représentation vectorielle de la figure 7.1 . . . . .	64
7.3	Schéma d'un système de traitement linéaire au receveur . . . . .	65
7.4	Indice d'efficacité par mobile en fonction de $\rho$ . . . . .	67
7.5	Indice d'efficacité par mobile en fonction de $\rho$ pour des $P_i = 1/N$ . . . . .	67
7.6	Deux cas d'utilisation du code VBLAST.m de [13] pour 16QAM . . . . .	69
7.7	Limite supérieure pour la moyenne normalisée de la capacité . . . . .	70
8.1	Schéma d'un système avec deux mobiles à plusieurs antennes . . . . .	72
8.2	Valeurs de moyenne d'efficacité par canal pour divers cas . . . . .	73

8.3	Moyenne de l'indice d'efficacité par canal en fonction de $\rho$ . . . . .	74
9.1	Modèle du système avec les délais à la transmission . . . . .	82
9.2	Modélisation simplifiée du système du modèle en figure 9.1 . . . . .	82
9.3	Distribution de la probabilité de l'indice de dégradation . . . . .	84
9.4	Distribution de la probabilité théorique de la distance minimale au carré . . . . .	85
9.5	Distribution de la probabilité théorique de la distance minimale au carré <b>corrigée</b> . . . . .	86
11.1	À Vancouver en janvier 2005 . . . . .	99

## Première partie

### Historique des communications



# Chapitre 1

## Historique des communications

”Je vais terminer ce que j’ai commen”, - Bart Simpson au tableau dans l’épisode 8F05

### 1.1 Le commencement en dix dates.

1. 3500 BC à 2900 BC - Les Phéniciens développent l’alphabet.
2. 900 BC - Le tout premier service postal, en Chine.
3. 1831 - Joseph Henry invente le premier télégraphe électrique.
4. 1876 - Alexandre Graham Bell demande un brevet sur le téléphone électrique.
5. 1902 - Marconi transmet le premier signal radio *transatlantique*.
6. 1906 - Deforest invente le triode, ou tube amplificateur.
7. 1944 - Le Mark I de Harvard, un ordinateur mis au service du gouvernement, l’âge de la science de l’information commence.
8. 1948 - Le transistor est inventé!
9. 1969 - ARPANET, le premier système Internet est mis en place.
10. 1979 - Au Japon, premier système de téléphonie cellulaire. Je suis né!

### 1.2 Le MIMO

Un brevet est déposé pour les communications sans-fil utilisant des antennes multiples en 1984 par M. Jack Winters du Bell Laboratories. M. Jack Salz publia un article sur le MIMO basé sur les travaux de M. Winters en 1985. Par la suite, de 86 à 95, plusieurs auteurs ont fait publications dans le domaine. En 1996, Greg Rayleigh et Gérard J. Foschini ont inventé des nouvelles approches accroissant l’efficacité du MIMO. Aussi, il a été démontré que la capacité du canal MIMO augmente avec le nombre d’antennes de façon proportionnelle.



## Deuxième partie

### Principes fondamentaux



# Chapitre 2

## Modélisation d'un canal de communications

"Bois un peu moins aujourd'hui, tu boira plus demain, et encore plus après demain." Aznavour

### 2.1 Modélisation d'un canal

#### 2.1.1 Système avec entrée(s)/sortie(s)

On définira un système par une unité comportant au moins une entrée et une sortie. Où la sortie correspond à l'entrée ayant subi certains processus de modifications. Un système peut être linéaire, ou non, avec mémoire, ou pas, et ainsi de suite avoir des propriétés particulières, mais se généralise par un système simple tel qu'à la figure 2.1.

#### 2.1.2 Système de communications

Un système de communications peut être représenté par un ensemble de systèmes simples. Diverses modélisations d'un système de communications existent. Certains combinent des sous-systèmes, d'autres allant plus loin dans les détails, mais généralement on retrouve au moins les quelques modules tels que représentés par la figure 2.2.

#### 2.1.3 Définition d'un canal

Un canal de communications est un médium physique qui est utilisé pour la transmission d'un signal à partir d'un transmetteur jusqu'au récepteur. Il est également possible de procéder via des ondes électromagnétiques dans le sans-fil. Quelque soit le mode de transmission, une constante demeure, c'est que des perturbations



FIG. 2.1 – Modèle d'un système simple

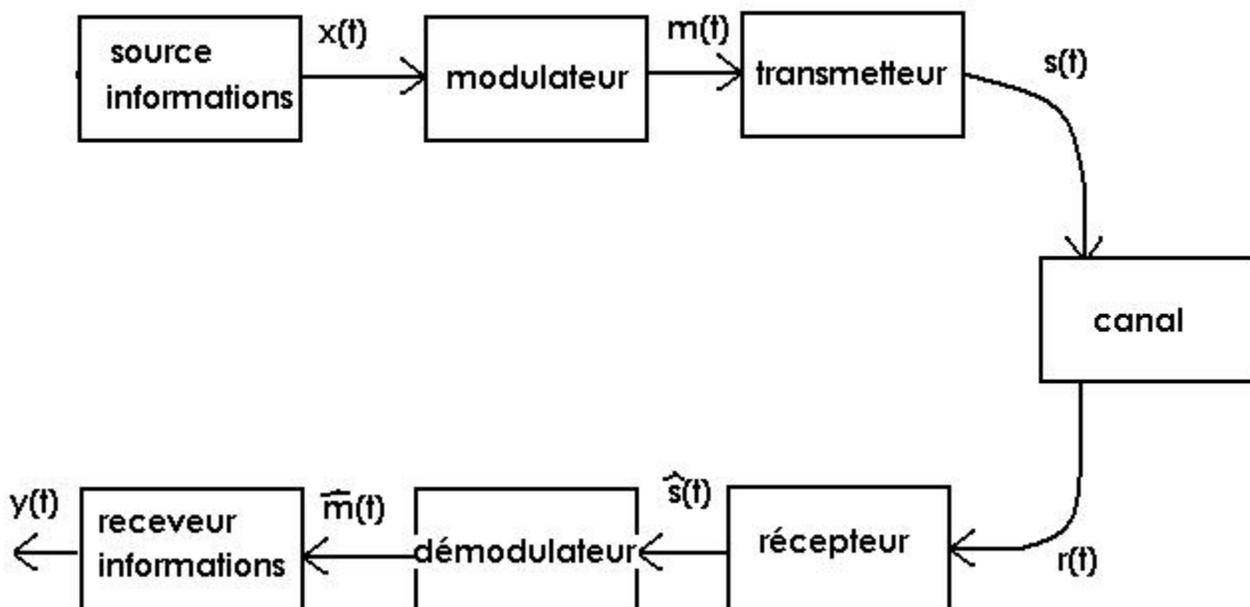


FIG. 2.2 – Modèle d'un système de communications

aléatoires non prévisibles affectent le signal transmis avant sa réception. On utilise les processus stochastiques pour fins de modélisation d'un canal de communications dû aux incertitudes inhérentes au processus. Un des problèmes communs est la présence de bruits additifs; ils ont diverses causes dont le bruit thermique des composantes constituant l'appareil récepteur par exemple. L'effet du bruit peut être atténué par l'augmentation de puissance du signal transmis. Toutefois, certaines limitations peuvent l'empêcher. La bande passante disponible est également une limitation majeure, non seulement due aux composantes physiques, mais par les restrictions législatives et la demande très élevée pour cette ressource limitée.

#### 2.1.4 Canal avec bruit additif blanc Gaussien

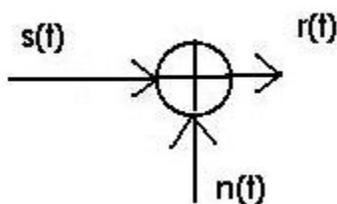


FIG. 2.3 – Modèle d'un canal avec bruit additif blanc gaussien

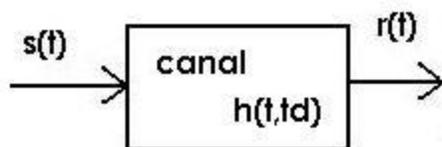


FIG. 2.4 – Modèle d'un canal avec évanouissement

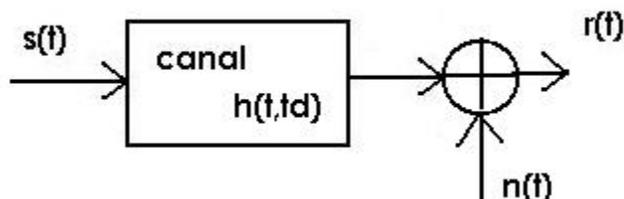


FIG. 2.5 – Modèle d'un canal avec évanouissement et bruit additif blanc gaussien

Sans doute le plus simple des modèles, nous avons le modèle de canal avec bruit additif blanc gaussien. Dans cette situation, le signal reçu  $r(t)$  est la résultante du signal original  $s(t)$  avec l'ajout de bruits modélisés par une fonction de densité de probabilité gaussienne tel qu'on le verra dans la sous-sous-section 3.1.1.1. Une version plus évoluée du modèle tiens compte de délais possibles entre la transmission et la réception. Ainsi un temps de délai  $t_d$  peut affecter le signal envoyé. Ainsi, l'équation  $r(t) = s(t) + n(t)$  et la figure 2.3 représentent ce modèle.

### 2.1.5 Canal avec évanouissement

Une version d'un modèle de canal ayant seulement l'évanouissement qui affecte le signal est aussi possible. Ce modèle est décrit par l'équation  $r(t) = h(t; t_d) * s(t)$  et la figure 2.4.

### 2.1.6 Canal avec évanouissement et bruit additif blanc Gaussien

Un canal modélisant à la fois un évanouissement et du bruit additif blanc gaussien est possible. Ce modèle est décrit par l'équation  $r(t) = h(t; t_d) * s(t) + n(t)$  et la figure 2.5.

## 2.2 Types de canal

Comme on peut comprendre jusqu'ici, un canal est modélisé par un filtre linéaire variant dans le temps avec ajout de bruits et d'interférences. Un signal est fait d'une composante aléatoire gaussienne en phase  $X$  et d'une composante aléatoire gaussienne en quadrature  $Y$  et sont jointes tel que présenté à la sous-sous-section 3.1.2.2 pour former le modèle d'un canal avec évanouissement de Rayleigh. Le cas particulier où il y a présence d'une ligne de vue fait en sorte qu'un autre modèle est privilégié tel qu'il le sera montré à la section 2.3 ainsi qu'à la figure 2.6. Bien entendu, d'autres modèles existent et chacun possède ses avantages et désavantages, mais ce n'est pas le lieu d'un tel débat. Malgré le fait qu'un modèle de canal est intimement lié au type

d'évanouissement dont le canal est victime et que nous n'aborderons l'évanouissement qu'au chapitre 3, voici tout de même ce qu'il en est du canal.

### 2.2.1 Modèle général

L'évanouissement dans un canal survient lors d'interférences destructives parmi les propagations du signal venant des multiples parcours qu'il emprunte. Ces multiparcours sont causés par réflexions, réfractions, ou diffractions dans le canal de communications. Le signal peut également subir une dispersion, c'est à dire qu'il tend à s'étendre sur le temps ou en fréquence. Il est également possible qu'un chemin ait une ligne de vue directe, ce qui sera considéré comme un cas particulier à la section 2.3. On peut représenter un message transmis par  $x(t)$ , ainsi que le message envoyé par  $s(t)$ , le message reçu par  $r(t)$  et l'enveloppe du message reçu  $w(t)$ . La fréquence de la porteuse est représentée par  $f_c$  ce qui résulte par les équations 2.1.

$$\begin{aligned} s(t) &= \Re \{ x(t) e^{j2\pi f_c t} \} \\ r(t) &= \Re \{ w(t) e^{j2\pi f_c t} \} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Il y a donc hypothèse de l'existence de plusieurs parcours, d'où l'application du théorème de la limite centrale présenté en sous section 3.1.1.6. On fera également l'hypothèse que le système en cause est linéaire, on pourra donc représenter la réponse du canal à une impulsion en tant que fonction gaussienne complexe,  $g(t, h)$ , qui illustrera la nature variante du temps du canal. Voici donc l'enveloppe en 2.2 et le canal après transformée de Fourier en 2.3.

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-h) g(t, h) \partial h \quad (2.2)$$

$$G(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, h) e^{-j2\pi fh} \partial h \quad (2.3)$$

On fera également l'hypothèse qu'il n'y a pas de ligne de vue, et qu'il y a présence de diffuseurs placés aléatoirement, et alors l'enveloppe suivra une fonction de Rayleigh. Dû à ces diverses hypothèses, on qualifiera également le canal de quasi-stationnaire, puisque pratiquement stationnaire dans un très petit intervalle temporel. Notez que plusieurs modèles existent selon les hypothèses sur la corrélation en cause. Les cas spéciaux pouvant potentiellement nous intéresser sont brièvement présentés dans les sous-sections suivantes.

### 2.2.2 Sélectif en fréquence

On désigne par sélectif en fréquences, un canal avec évanouissements à haut niveau de corrélation dû à des fréquences rapprochées et sans corrélation pour les fréquences bien espacées. Implicitement, ce type de canal est non sélectif en temps. L'équation 2.2 se résumerait donc par

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-h) g(h) \partial h, \quad (2.4)$$

où  $g$  n'est plus une fonction du temps. La largeur de bande cohérente est définie comme étant la largeur de bande d'un signal reçu pour lequel l'évanouissement sera hautement corrélé. C'est donc en fait la limite de la largeur de bande à laquelle on se limitera.

### 2.2.3 Sélectif en temps

On désigne par sélectif en temps, un canal avec évanouissements à haute corrélation dû à des temps rapprochés et sans corrélation lorsque avec espace temporel suffisant. Ce type d'évanouissement causera des interférences entre les symboles envoyés et ainsi, une dégradation de la probabilité d'erreur. Le temps de cohérence est l'intervalle de temps du signal reçu pour lequel l'évanouissement sera hautement corrélé. Ici, l'équation en 2.2 deviendra comme en 2.5 puisque l'on devient indépendant de la fréquence.

$$w(t) = x(t)g(t) \quad (2.5)$$

### 2.2.4 Sélectif en temps et en fréquence

On déduit logiquement par les deux sous-sections précédentes que ce cas correspond à une corrélation en fonction du niveau d'espacement en temps et fréquence. Ainsi, ce type de canal est doublement dispersif. Par contre, la sélectivité en temps et en fréquence est exclusive ou indépendante. Ainsi, on doit être à la fois au dessus des limites et sous les limites.

### 2.2.5 Non sélectif

Ce type de canal, bien plus simple et commun, ne démontre aucune sélectivité, que ce soit en temps ou en fréquence. Ainsi, l'équation 2.6 représente ce type de canal.

$$r(t) = A\Re\{w(t)e^{j2\pi f_c t - \theta}\} \quad (2.6)$$

Où  $A$  et  $\theta$  sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes et invariantes dans le temps.  $A$  étant une variable aléatoire suivant une distribution de Rayleigh, et  $\theta$  étant une variable aléatoire uniforme entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Ce type de modèle a une bande passante bien inférieure à la bande passante cohérente, il en est de même pour le temps.

## 2.3 Ligne de vue

Lorsque l'on parle de ligne de vue, on désigne ainsi la possibilité de voir directement le récepteur à partir du transmetteur. Lorsqu'une ligne de vue existe, on utilise généralement une fonction de densité de probabilité de Rice pour modéliser l'évanouissement du canal. Enfin, lorsque la ligne de vue n'existe pas et que la transmission se rend au récepteur en passant par des échos et réflexions, on utilise généralement la fonction de densité de probabilité de Rayleigh. On retrouve deux exemples dans la figure 2.6. En effet, le mobile 1 a accès à deux réflexions du signal d'origine en plus d'un signal 'ldv', c'est à dire en ligne de vue. Et donc, il lui sera possible d'atteindre de meilleurs niveaux de SNR. Quant au mobile 2, il n'y a que des réflexions qui s'y rendent. Il devra utiliser des astuces et des techniques de diversités, entre autres, afin de maintenir un bon niveau de qualité de signal reçu.

## 2.4 Type de dispersion

Plusieurs types de perturbations peuvent avoir lieu, que l'on soit en présence d'une ligne de vue ou pas. On peut être en présence de diffuseurs à la station mobile, à la station de base, ou aux deux bornes de la communication. Selon le type de dispersion, la communication est affectée différemment, mais nous n'iront pas jusque dans les détails concernant cette particularité, si ce n'est que de vous les présenter aux figures 2.7, 2.8 et 2.9.

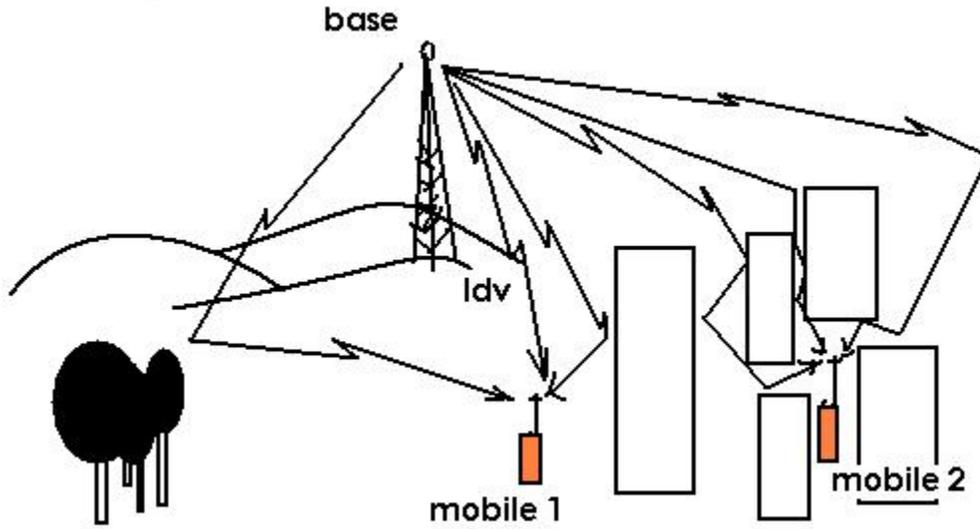


FIG. 2.6 – Exemple avec et sans ligne de vue

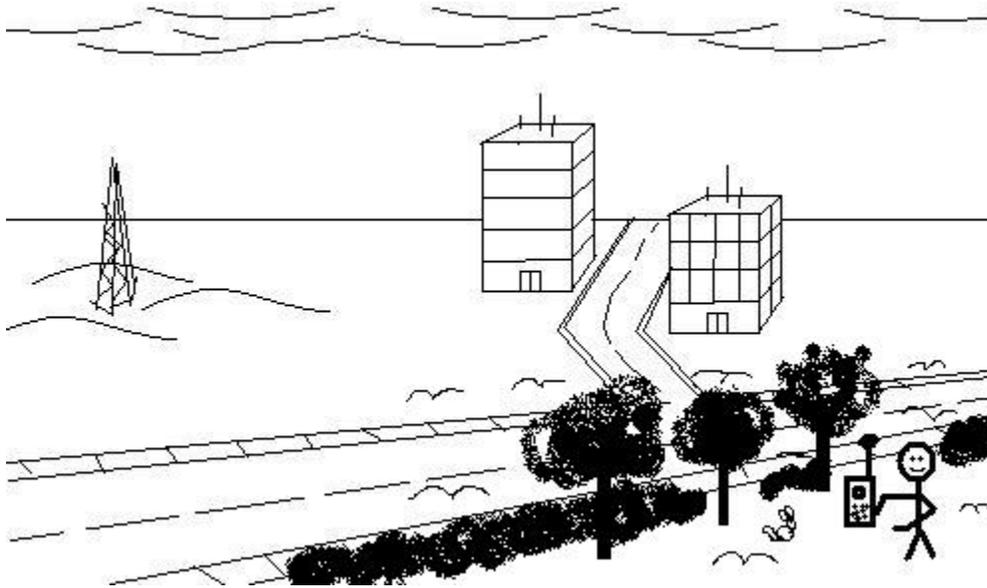


FIG. 2.7 – Dispersion à la station mobile

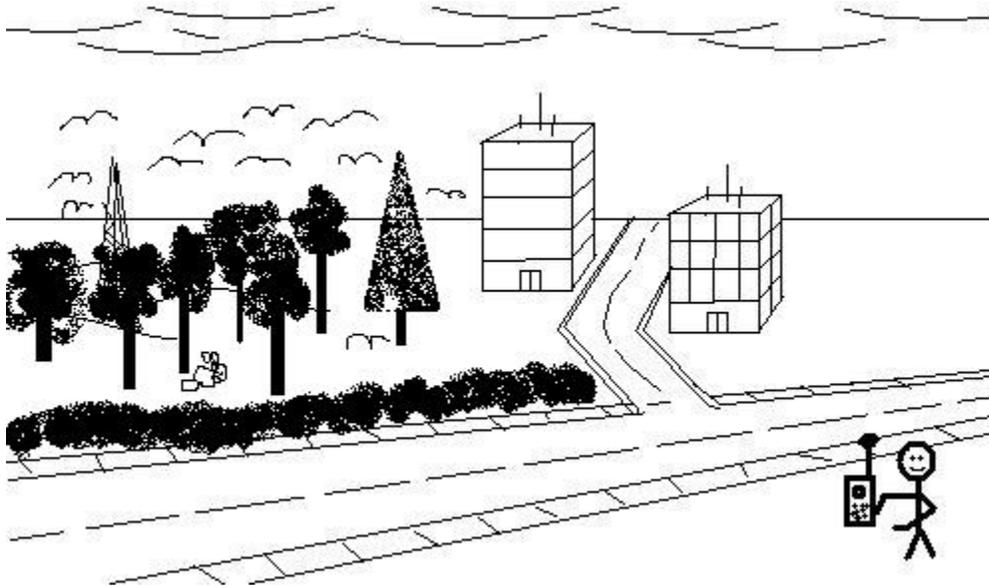


FIG. 2.8 – Dispersion à la station de base

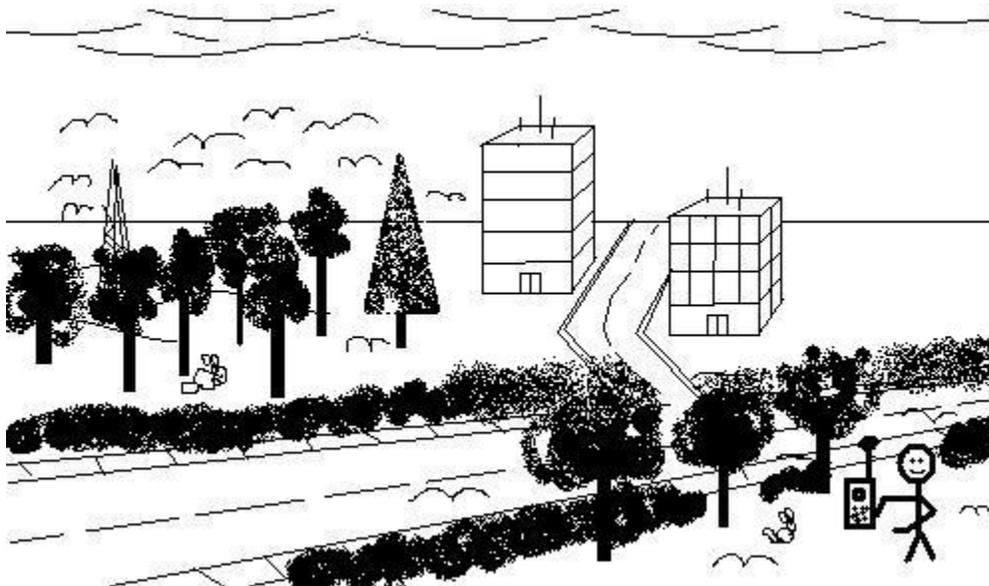


FIG. 2.9 – Dispersion aux deux bornes d'une communication

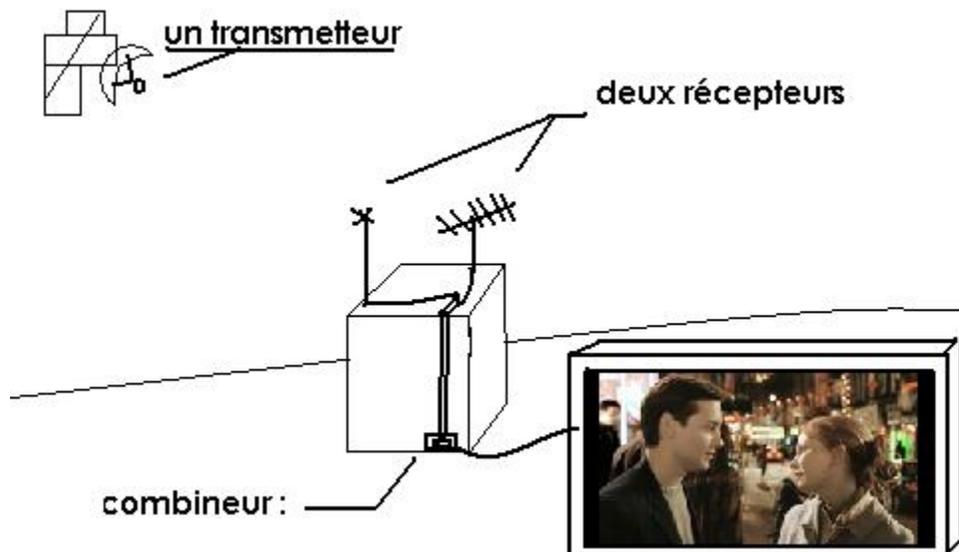


FIG. 2.10 – Gain d’antennes (ou gain matriciel) avec deux Rx et un Tx

## 2.5 Modèle de canal multiparcours

Tel qu’on a pu le voir sur la figure 2.6, que l’on soit avec ou sans ligne de vue, plusieurs parcours sont généralement disponibles pour la propagation du message entre un transmetteur et un récepteur. On le voit également sur la figure 2.9 où la propagation du signal peut passer par réflexion sur les immeubles par exemple. Malgré que ce soit des messages de moindre qualité qu’en présence d’une ligne de vue directe, il demeure préférable d’avoir de multiples parcours pour la transmission du message. Cela accroît la probabilité d’arrivée d’un message en bonne condition. Maintenant, on peut soit considérer cela comme une nuisance, ou en tirer profit. Un moyen d’en tirer profit, est l’usage de multiples antennes aux transmetteur et récepteur. Cela créera des parcours de propagations supplémentaires. C’est aussi un moyen d’accroître la capacité d’une transmission. Quoiqu’il en soit, quelques-uns des avantages que l’on peut en tirer dans les sous-sections suivante, et il en sera également question dans une revue de diverses méthodes de diversité présentée au chapitre 6.

### 2.5.1 Gain matriciel

Un gain matriciel est possible par la diversité d’antenne. C’est à dire que l’on sera, par exemple, en présence de plusieurs antennes au récepteur, et une au transmetteur. On aura donc deux versions du signal reçu, chacun avec son propre SNR et sa perception du signal envoyé. Il sera donc possible par combinaison appropriée de cumuler les SNR des liens individuels, et ainsi, d’accroître la qualité du signal reçu. Il est alors plus probable d’estimer avec plus de certitude quel message a été envoyé. La figure 2.10 montre un exemple d’une telle situation ou un système combine et traite un signal reçu afin d’avoir un meilleur signal résultant.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ce paragraphe donne la description de la diversité au récepteur, soit le type le plus courant de diversité.

### 2.5.2 Gain en diversité

Un gain en diversité sera également possible avec l'usage de multiples antennes. Cela permet de combattre l'atténuation, et ainsi, de fournir au récepteur plusieurs versions du même signal par des transmetteurs indépendants, donc avec atténuations indépendantes.<sup>2</sup> Plus le nombre de transmetteurs sera élevé, plus la probabilité qu'à un instant donné qu'un signal reçu ne soit pas très atténué augmente. L'idéal est l'utilisation de multiples antennes, à la fois au transmetteur et au récepteur. Ainsi, si les différentes versions du signal et leur atténuations sont indépendantes, l'ordre de diversité atteinte sera le produit du nombre d'antennes au transmetteur, avec le nombre d'antennes au récepteur. Le développement mathématique complet vous est épargné, mais on sait que plus l'ordre de diversité augmente, plus le taux d'erreurs sera à la baisse avec la hausse du SNR. L'équation 2.7<sup>3</sup> régit le taux d'erreur en fonction du SNR, du nombre d'antennes réceptrices, du rang de la matrice différentielle<sup>4</sup> de deux blocs transmis par les transmetteurs, et de la variance de la matrice différentiel.

$$\log TE \leq -M_r L \left( \log \left( \frac{SNR}{4} \right) + \log \left( \left( \prod_{l=1}^L \sigma_l^2 \right)^{1/L} \right) \right) \quad (2.7)$$

### 2.5.3 Gain en multiplexage

Un gain en multiplexage est également possible dans le contexte d'un système de communications MIMO. Cela requière l'envoi d'une partie de signal par chaque antenne au transmetteur. Ce signal sera perçue par chacune des antennes réceptrices puis interprétée pour estimer chacune des parties du signal original. Ces parties finalement décodées seront ensuite combinées afin de comprendre le message envoyé à l'origine. Si l'on considère un signal envoyé  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{M_t}]^T$  et  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M_r}]^T$ , le signal reçu, on peut alors décrire le système MIMO par l'équation vectorielle 2.8. Où  $\mathbf{n}$  correspond à la matrice du bruit, et  $\mathbf{H}$ , à la représentation matricielle du canal.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (2.8)$$

Lorsque le canal est carré et orthogonal, avec des entrées i.i.d., on peut représenter la capacité par l'équation 2.9 où  $M = M_r = M_t$  canaux parallèles sont implicitement créés dans la même bande de fréquence sans puissance de transmission additionnelle. La capacité croît linéairement avec le nombre d'antennes pour des SNR croissants, c'est-à-dire que la capacité croît de M bits/s/Hz pour chaque augmentation de 3dB du SNR. Lorsque le nombre de récepteurs et de transmetteurs ne sont pas égaux, c'est le nombre inférieur qui limite l'augmentation de la capacité. C'est cette augmentation de la capacité qui est désignée par gain en multiplexage. La figure 2.11 nous présente le comportement de la capacité pour quelques valeur de M, en fonction du SNR tel que présenté par l'équation 2.9.

$$C = M_t \log \left( 1 + \frac{1}{M_t} SNR \right) \quad (2.9)$$

### 2.5.4 Réduction d'interférences

Le problème avec les communications sans-fil est que les interférences, entre les diverses versions du message, ainsi que la réutilisation de mêmes fréquences par plusieurs, causent de l'interférence destructive, selon le moment, lieu, direction, vitesse, etc. Afin de bien combattre cette interférence, il est préférable de connaître le

<sup>2</sup>La diversité au récepteur nécessite l'usage d'un code espace-temps comme celui d'Alamouti afin d'être fonctionnelle.

<sup>3</sup>L'équation décrite est applicable seulement aux codes espace-temps en bloc.

<sup>4</sup>On prend cette matrice différentiel de la différence entre les différents blocs de codes  $X^i [M_t \times T]$  que l'on étendra sur T échantillons temporels au travers des  $M_t$  antennes de transmission.

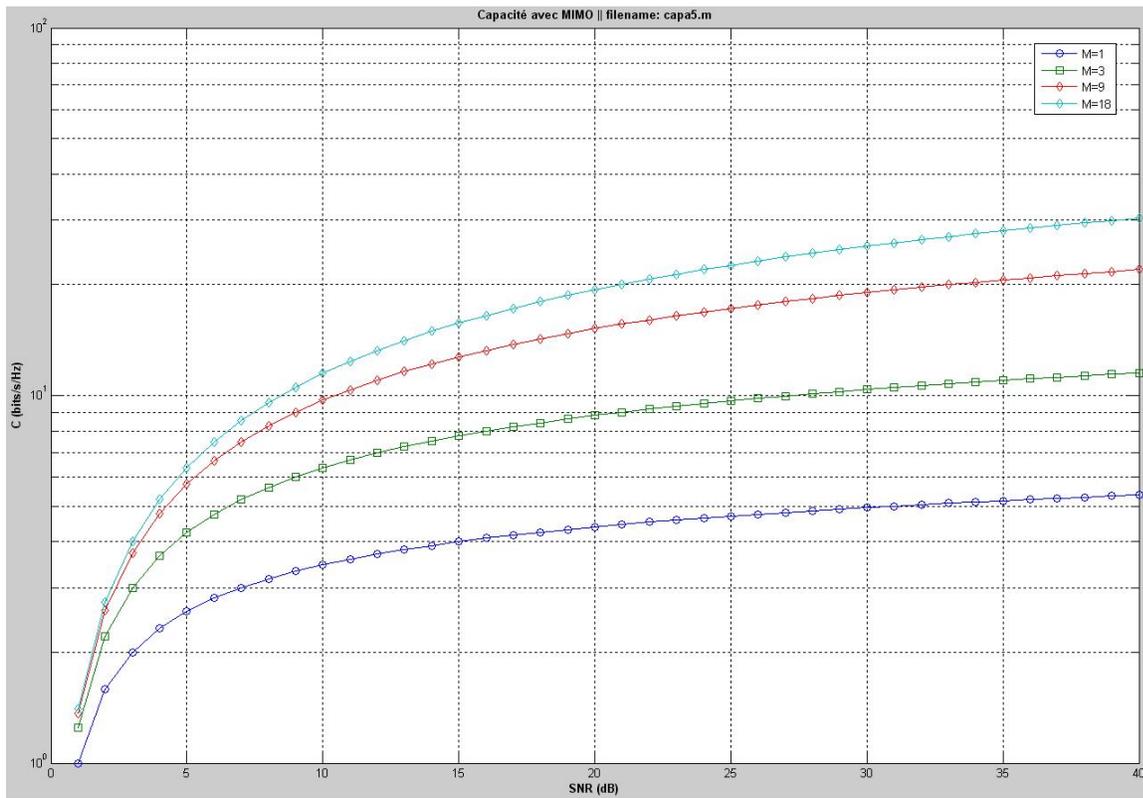


FIG. 2.11 – Capacité du canal pour canal à évanouissements i.i.d.

canal tel que vu par le signal du transmetteur désiré. Le but est donc d'amplifier le signal désiré et d'atténuer les signaux interféreurs. La technique est difficile d'utilisation et la combinaison des divers moyens n'est pas toujours possible. Plusieurs techniques demeurent tout de même possibles selon les exigences du contexte. Pour en connaître quelques-unes, il suffira de consulter le chapitre 6 qui s'adresse aux diverses techniques de diversité.



# Chapitre 3

## Modélisation de l'évanouissement

Law of Applied Terror : "80% of the final exam will be based on the one lecture you missed about the one book you didn't read."

### 3.1 Fonctions de probabilité

#### 3.1.1 Fonction Gaussienne

##### 3.1.1.1 Fonction de densité de probabilité

Une variable aléatoire est dite de type gaussien si elle suit la fonction de densité de probabilité décrite par l'équation 3.1. On représente généralement une variable aléatoire  $X$ , une variable aléatoire de type gaussien de la façon suivante :  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , où  $\mu$  représente la moyenne et  $\sigma^2$  la variance.  $Pr \{x = X\} = f_x(x)$  définit la fonction de densité  $f_x(x)$ . L'intégrale sous la courbe de la fonction de densité de probabilité est toujours égale à 1. Le tracé de la fonction de densité de probabilité gaussienne a la forme d'une cloche symétrique autour de la moyenne. La figure 3.1 vous présente une f.d.p.<sup>1</sup> gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (3.1)$$

##### 3.1.1.2 Fonction de distribution de probabilité<sup>2</sup>

La fonction de distribution de la probabilité représente l'accumulation de la densité de probabilité ou la probabilité d'occurrence d'un événement plus petit ou égal à un point fixé.  $Pr \{x \leq X\} = F_x(x)$  définit la fonction de distribution  $F_x(x)$ . Le tracé d'une fonction de distribution de la probabilité est une fonction croissante avec un minimum nul et un maximum de 1. La fonction de distribution de probabilité gaussienne, représentée à la figure 3.2, également formulée par l'équation 3.2, se retrouve généralement sous forme tabulée<sup>3</sup> :

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy \triangleq G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>Fonction de Densité de Probabilité

<sup>2</sup>Aussi désigné par son acronyme anglophone (C.D.F.) venant de Cumulative Density Function.

<sup>3</sup>En effet, la fonction  $G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$  se retrouve généralement dans des tables.

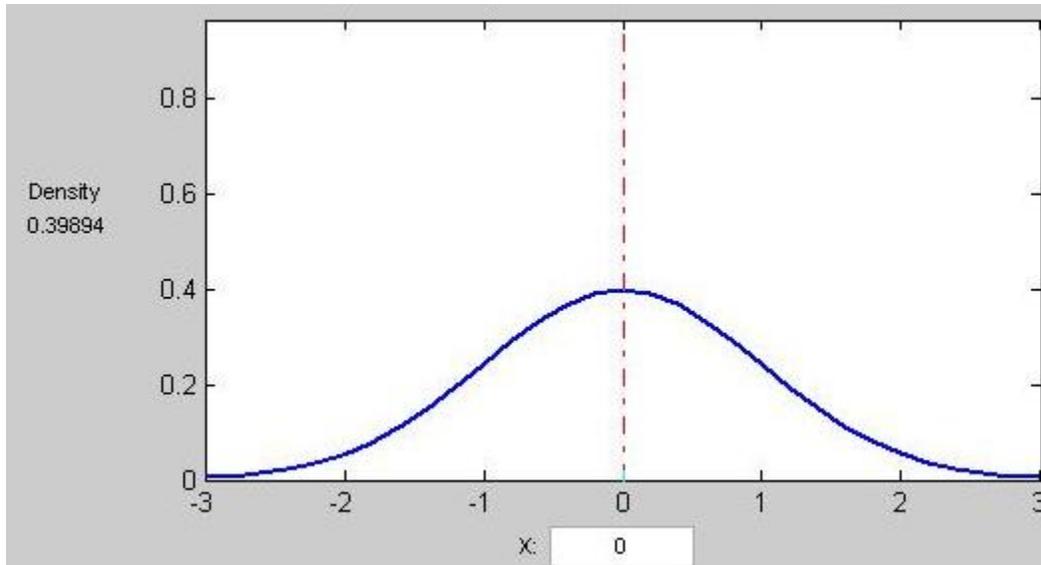


FIG. 3.1 – F.D.P. d'une Gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire

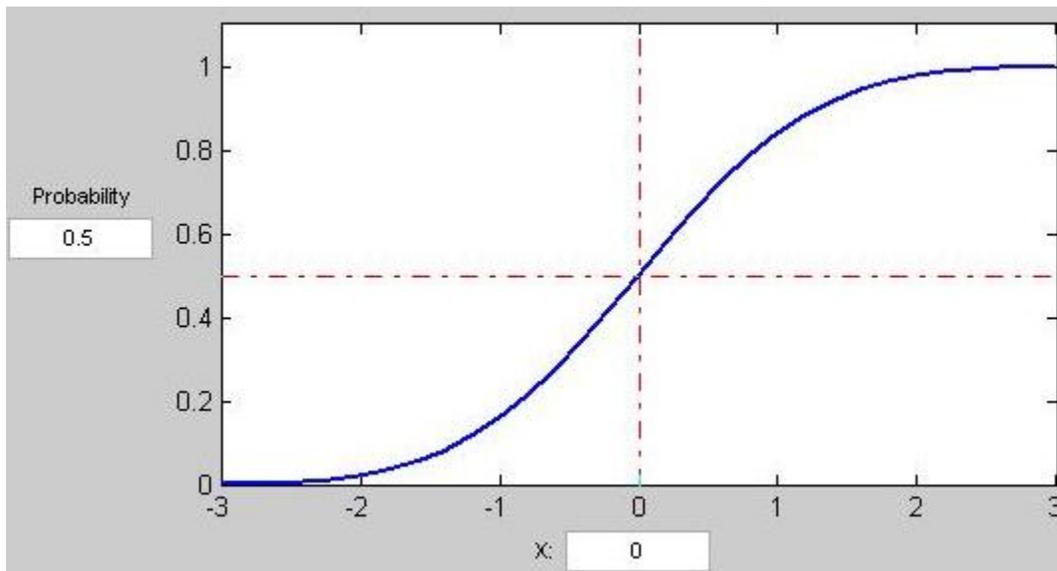


FIG. 3.2 – C.D.F. d'une Gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire

### 3.1.1.3 Fonction linéaire d'une variable aléatoire Gaussienne

Comme on le sait maintenant, on est en mesure de désigner une fonction de densité de probabilité unique par les paramètres de moyenne et de variance. Une fonction linéaire d'une variable aléatoire gaussienne s'exprime également de la même façon mais avec quelques variantes. En effet, pour  $a$  et  $b$ , deux nombres réels, et  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , une variable aléatoire gaussienne, lorsque nous avons  $aX + b = Y$ , nous obtenons également une variable aléatoire gaussienne mais ayant les paramètres suivants :  $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ .

### 3.1.1.4 Fonction de deux variables aléatoires conjointement gaussiennes

On dit de deux variables aléatoires jointes qu'elles sont conjointement gaussiennes lorsque la fonction de densité de probabilité conjointe  $f_{xy}(x, y)$  suit la courbe décrite à l'équation 3.3. Cette équation peut représenter aussi bien les fonctions jointes dans les cas où elles sont corrélées que dans les cas où elles sont indépendantes. En effet, le coefficient de corrélation  $\rho$ , qui existe dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , indique le niveau de corrélation. Il suffit de porter la valeur de ce coefficient à 0 afin d'atteindre un état où les deux fonctions sont indépendantes<sup>4</sup>.

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_Y^2}\right)} \quad (3.3)$$

$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, |\rho| < 1$

### 3.1.1.5 Somme de variables aléatoires gaussiennes

La somme de variables aléatoires gaussiennes indépendantes résulte également en une variable aléatoire gaussienne mais de moyenne égale à la somme des moyennes des variables aléatoires sommées, ainsi que de variance égale à la somme des variances des variables aléatoires sommées. La preuve peut se faire via une propriété mentionnant qu'une somme de variables aléatoires est l'équivalent d'un produit des fonctions caractéristiques. Sachant que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire gaussienne est telle que représentée par l'équation 3.4, on peut clairement en tirer la preuve.

$$\phi_x(t) = \exp\left(\mu jt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \quad (3.4)$$

### 3.1.1.6 Théorème de la limite centrale

D'après le théorème de la limite centrale, si la somme de variables aléatoires quelconques, indépendantes, et identiquement distribuées a une variance finie, elle devra tendre vers la forme d'une fonction gaussienne. Une variante de ce théorème stipule que lors d'un produit de variables aléatoires indépendantes en grande quantité, il en résulte un phénomène suivant plutôt la fonction de probabilité log-normale. La preuve est faite et très bien détaillé au sein des pages 106 à 111 du manuel sur les communications de Wozencraft[3].

### 3.1.1.7 Applications en communications de la fonction Gaussienne

Les applications de la fonction gaussienne en communications sont multiples. Comme on le verra dans les prochaines sous-sections, elle est à la base d'autres fonctions de probabilité très importantes en communications, mais elle est aussi utilisée dans la modélisation de la représentation du bruit et des interférences présents dans tout système de communications.

---

<sup>4</sup>i.e. : non corrélées

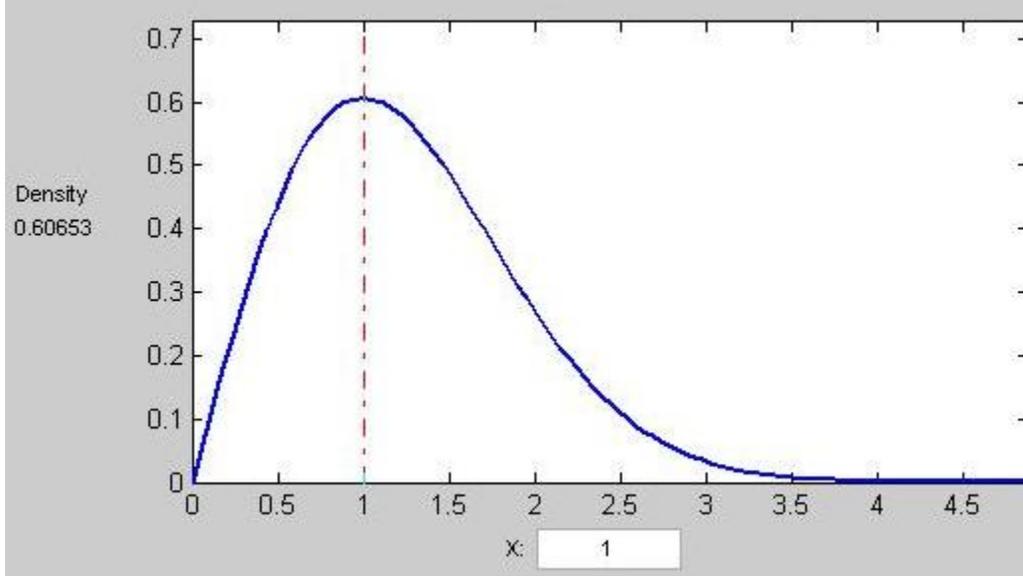


FIG. 3.3 – P.D.F. d'une Rayleigh de variance unitaire

### 3.1.2 Fonction de Rayleigh

#### 3.1.2.1 Fonction de densité de probabilité

Une variable aléatoire est dite de Rayleigh si elle suit la fonction de densité de probabilité décrite par l'équation 3.5. Une variable aléatoire de Rayleigh,  $Z$ , n'a besoin que d'un paramètre  $\sigma^2$ , sa variance, afin d'être uniquement représentée. Tel que l'on constate par la définition de l'équation, il n'existe aucune valeur à  $z \leq 0$ , et la fonction atteint un maximum au point de son paramètre. La figure 3.3 vous présente la F.D.P. de Rayleigh de variance unitaire.

$$f_z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/2\sigma^2} U(z) \quad (3.5)$$

#### 3.1.2.2 Lien avec la fonction de densité gaussienne

On sait qu'une transmission peut se représenter par une variable aléatoire gaussienne complexe comme suit :  $X + jY = Z$ , où  $X, Y$  sont des variables aléatoires gaussiennes réelles et indépendantes. Ce que l'on ne vous avait peut-être pas dit, c'est que lorsque l'on a  $|W| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ,  $W$  correspond à une fonction de densité de probabilité de Rayleigh. En effet,  $W$ , qui graphiquement est représentable par un cercle, peut se développer mathématiquement via les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{y=-z}^z \int_{x=-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f_{XY}(x, y) dx dy \\ f_Z(z) &= \int_{y=-z}^z \left( f_{XY}(\sqrt{z^2-y^2}, y) + f_{XY}(-\sqrt{z^2-y^2}, y) \right) dy \\ f_Z(z) &= 2 \int_0^z \frac{z}{\sqrt{z^2-y^2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(z^2-y^2+y^2)/2\sigma^2} dy = \frac{2z}{\pi\sigma^2} e^{-z^2/2\sigma^2} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z^2-y^2}} dy \\ &= \frac{2z}{\pi\sigma^2} e^{-z^2/2\sigma^2} \int_0^{\pi/2} \frac{z \cos \theta}{z \cos \theta} d\theta = \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/2\sigma^2} U(z). \end{aligned} \quad (3.6)$$

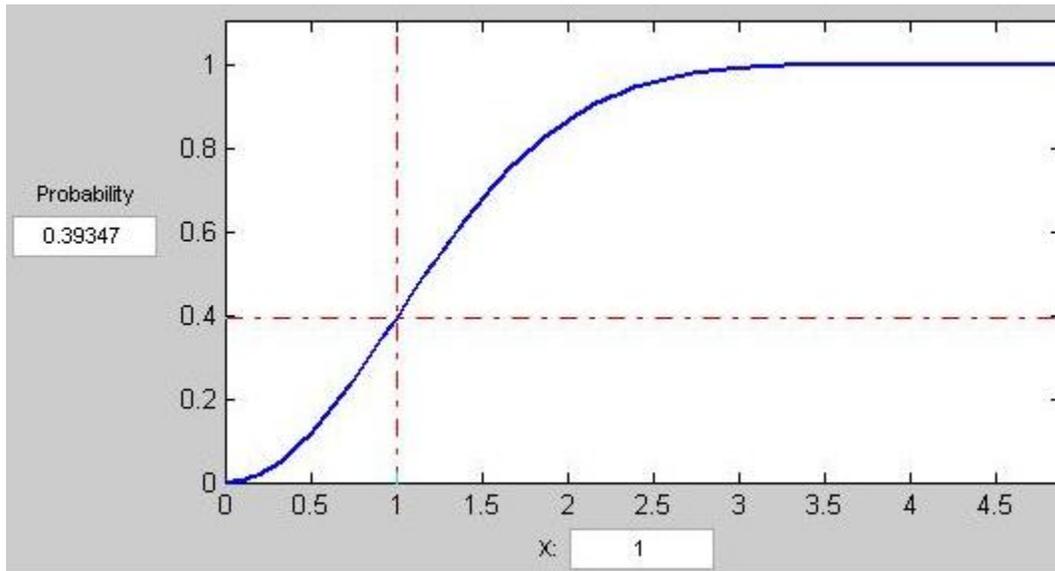


FIG. 3.4 – C.D.F. d'une Rayleigh de variance unitaire

### 3.1.2.3 Fonction de distribution de probabilité

On sait que pour aller de la fonction de densité de probabilité vers la fonction de distribution de la probabilité, il nous faut passer par l'égalité suivante,  $f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x)$ , où le grand 'F' désigne la fonction de distribution, et le petit 'f', la fonction de densité. L'intégrale de  $f_X(x)$  nous amènerais donc vers la fonction de distribution de probabilité recherchée. Cette dernière s'obtient donc via quelques manipulations mathématiques et vous est présentée à l'équation 3.7. Pour ce qui est de sa représentation graphique, nous obtenons la figure 3.4 pour la fonction de distribution de probabilité de Rayleigh avec un paramètre unitaire.

$$f_Z(z) = 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}z^2} \quad (3.7)$$

### 3.1.2.4 Applications en communications de la fonction de Rayleigh

Tel qu'on le verra plus en détails au sein de la section 3.3, la fonction de Rayleigh est utilisée pour représenter, en communications, le niveau d'atténuation d'un signal transmis dans les situations où une station mobile n'a pas de ligne de vue directe avec la station de base.

## 3.1.3 Autres fonctions

### 3.1.3.1 Fonction de densité de probabilité de Rice

On sait que le radical d'une somme des carrés de deux gaussiennes de moyenne nulle au carré nous donne une variable aléatoire gaussienne, mais lorsque les moyennes de ces gaussiennes ne sont plus nulles, on obtient alors une variable aléatoire ricéenne. On se retrouve donc maintenant avec une courbe similaire à celle de Rayleigh, mais centrée autour du paramètre  $\nu$ . La fonction de densité de probabilité de Rice correspond donc à l'équation 3.8. Notez la référence à une fonction  $I_0(x)$ , cette dernière constitue une fonction modifiée de

Bessel du premier type d'ordre zéro. Notez également que lorsque  $\nu = 0$ , on simplifie la fonction ricéenne par une fonction de Rayleigh.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right) \\ I_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{x \cos u} du \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.1.3.2 Applications en communications de la fonction de Rice

La fonction de Rice est utilisée pour représenter, en communications, le niveau d'atténuation d'un signal transmis dans les situations où une station mobile a une ligne de vue directe avec la station de base. Ainsi, l'atténuation est centrée autour d'une valeur se démarquant. C'est celle du signal en ligne de vue.

### 3.1.3.3 Fonction de densité de probabilité de Nakagami- $m$

La fonction de densité de probabilité de Nakagami avec paramètre  $m$ , est une fonction développée empiriquement par M. Nakagami dans les années 60. Cette fonction, par le biais de son paramètre, permet d'obtenir divers types de fonctions de probabilité. En effet, lorsque le paramètre  $m$  est de  $1/2$ , soit le point minimum de  $m$ , on obtient la fonction correspondant à une demi-fonction gaussienne, et lorsque  $m$  est de 1, on a une fonction de Rayleigh. Cette fonction est très utile pour fins de modélisation de canal multiparcours avec évanouissement dans les communications sans-fil. Sans plus tarder, voici donc en équation 3.9, la fonction de densité de probabilité de Nakagami- $m$ . Notez que le  $\Omega$  de l'équation de la fonction de Nakagami- $m$  correspond à son second moment, c'est-à-dire  $\Omega = E[X^2]$ , et le  $m$ , au paramètre d'évanouissement de la fonction, tel que  $m = \Omega^2 / \left(E[(X^2 - \Omega)^2]\right)$  et  $m \geq 1/2$ .

$$F_X(x) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m x^{2m-1} e^{-mx^2/\Omega} \quad (3.9)$$

## 3.2 Types d'évanouissement

### 3.2.1 Qu'est donc un évanouissement ?

L'évanouissement que connaît une communication sans-fil est en fait une atténuation de la puissance du signal perceptible dû à diverses causes selon le type d'évanouissement rencontré. On peut les regrouper en trois catégories, la perte de puissance en chemin, l'ombrage, et l'évanouissement. Le premier consiste en fait la perte de puissance à mesure que se propage un signal électromagnétique dans l'espace. Le second, quant à lui, est dû à la présence d'obstacles fixes dans le chemin de propagation d'un signal radio. Enfin, la troisième catégorie est l'évanouissement proprement dit, qui se compose d'effets combinés de multiples parcours de propagation, de mouvements rapides des unités transmetteurs et récepteurs, et enfin, des réflecteurs. La dernière catégorie énoncée est celle qui nous intéresse. Cet évanouissement décrit en fait les fluctuations rapides de l'amplitude du signal reçu sur une courte période de temps. Ce phénomène est causé par l'interférence d'au moins deux versions du signal transmis qui arrivent au récepteur avec un léger décalage temporel. La résultante peut grandement varier en amplitude et en phase en fonction de multiples facteurs tel que l'intensité, le délai entre les ondes, la largeur de bande du signal, etc. La performance du système peut donc être très dégradée par l'évanouissement, mais heureusement, plusieurs techniques peuvent aider à la contrer, partiellement du moins.

### 3.2.2 Types d'évanouissement<sup>5</sup>

Les fluctuations rapides du signal sur de petites périodes sont causées par les multiples versions du signal<sup>6</sup> qui se causent interférences constructives et destructives entre elles. Quant aux changements dans les grands objets aux alentours de la station mobile, ils affecteront la moyenne du signal autour duquel les fluctuations rapides ont lieu. Ces grands objets causent l'évanouissement lent. Quant aux fluctuations rapides, ils constituent l'évanouissement rapide.

#### 3.2.2.1 Évanouissement uniforme (plat ou non-sélectif)

L'évanouissement uniforme désigne le canal sans-fil avec évanouissement par lequel le gain et la phase sont constants sur une largeur de bande plus grande que la largeur de la bande du signal transmis. En fait, c'est le signal pour lequel toutes les fréquences sont affectées dans la même proportion.

#### 3.2.2.2 Évanouissement rapide

L'évanouissement rapide désigne le canal sans-fil avec évanouissement par lequel la réponse du canal change rapidement durant la période d'un symbole. Cet évanouissement est dû aux réflexions d'objets proches et aux déplacements relatifs de ces derniers.

#### 3.2.2.3 Évanouissement lent

L'évanouissement lent désigne le canal sans-fil avec évanouissement par lequel l'ombrage, par rapport à l'émetteur source d'un signal électromagnétique, d'édifices, de montagnes, et autres grands objets. Des chemins de propagation souffriront de pertes de signal, alors que d'autres seront moins influencés et pourront avoir un signal plus puissant.

#### 3.2.2.4 Évanouissement à petite échelle

Tel qu'on a pu le voir durant le cours<sup>7</sup>, un signal reçu sans bruit et transmis sans modulation peut être représenté par l'équation 3.10.

$$r(t) = \sum_i \alpha_i(t) \cos(2\pi f_c(t - \tau_i(t))) \quad (3.10)$$

$\alpha_i(t)$  représente le facteur d'atténuation dans le temps pour le  $i$ -ième signal avec délai de propagation.  $f_c$  est la fréquence de la porteuse, et  $\tau_i(t)$  le délai dans le temps. C'est ce délai qui, lorsqu'il est plus petit que  $T$ , la période d'un symbole, cause l'évanouissement rapide. Nous avons également vu l'équivalent en bande de base qui peut s'exprimer comme suit :

$$h(t) = \sum_i \alpha_i(t) e^{-j2\pi f_c \tau_i(t)}. \quad (3.11)$$

Le facteur d'atténuation est généralement représenté de façon aléatoire, et donc, c'est là qu'intervient, entre autre, la fonction de densité de probabilité de Rayleigh dans les cas où il n'y a pas de ligne de vue directe. Notez également que le délai peut changer de façon aléatoire, et que dans ces cas, lorsque le nombre de chemins de propagation est élevé, le théorème de la limite centrale s'applique et la fonction 3.11 se comporte telle une fonction complexe gaussienne.

<sup>5</sup>Cette sous-section, comme tant d'autres, pourrait être étendu, n'hésitez pas à consulter les références pour plus d'informations.

<sup>6</sup>signal original, signaux réfléchis, etc.

<sup>7</sup>GEL 66801, *Communications Numériques Avancées*, Automne 2005

### 3.3 Évanouissement de Rayleigh

Lorsque  $\alpha_i(t)$  a une densité de probabilité de Rayleigh, tel que présenté en équation 3.5, une courbe tel que 3.3 est obtenue comme représentation graphique de l'évanouissement. Ce cas représente le pire cas d'évanouissement puisque nous n'avons pas de ligne de vue entre l'émetteur et le récepteur. La puissance est alors de distribution exponentielle<sup>8</sup>, et est indépendante de la phase qui, quant à elle, suit une distribution uniforme.

---

<sup>8</sup>En fait, elle est de distribution Chi-carré de degré de liberté '2', ce qui correspond, comme on le sait, à une exponentielle.

# Chapitre 4

## Détection de signaux et modulation

Murphy's Fourth Law : If there is a possibility of several things going wrong, the one that will cause the most damage will be the one to go wrong.

### 4.1 Modulation

Tel qu'on a pu le voir à la figure 2.2, une des étapes lors d'une communication, consiste en la modulation d'un signal à transmettre. Ce que l'on n'a pas dit jusqu'ici, c'est ce qu'est la modulation. La modulation est une sorte de processus d'encodage d'une séquence de bits d'une certaine longueur en un signal d'une certaine forme. On dit qu'il y a  $M$  sortes de formes de signal possible pour des séquences de longueurs de bits de  $k$ , où  $k = \log_2 M$ , et les formes de signaux correspondent à

$$\mathbf{b}_i \Rightarrow s_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{b}_i$  se trouve à être une des séquences de bits de longueur  $k$  à transmettre,  $s_i(t)$  où  $i = 1, 2, \dots, M$  constitue l'ensemble des signaux de modulation, et  $T$  est la période du signalement. On peut revoir une figure similaire à 2.2 mais indiquant la correspondance avec cette nomenclature en figure 4.1.

Malgré l'ingéniosité du concept, deux problèmes importants sont associés à la figure 4.1 :

1. Avec une modulation donnée et une description statistique du canal de communications, comment peut-on modéliser un canal? Également, quelle est la plus petite probabilité d'erreur atteinte par un récepteur optimal?



FIG. 4.1 – Système de communication, de la séquence de bit au signal

2. Pour un canal donné, comment devrait-on choisir une modulation qui minimiserait la probabilité d'erreur sous des contraintes de puissance, de limites en largeur de bande, de limitations au niveau de l'émission maximale énergétique, etc. ?

Avant de passer à la détection de signaux et à la modulation d'amplitude en quadrature, nous allons voir rapidement quelques définitions concernant l'espace des signaux.

#### 4.1.1 Espace des signaux

##### 4.1.1.1 Signaux orthonormaux

Un ensemble de signaux sont définis comme étant orthonormaux lorsque, pour un intervalle<sup>1</sup> donné, ils respectent l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt &= 1, & i = j, \\ \int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt &= 0, & \text{autrement.} \end{aligned} \quad (4.2)$$

##### 4.1.1.2 Combinaison linéaire

Un signal découlant d'une combinaison linéaire de  $N$  signaux orthonormaux résulte en la forme suivante où les  $s_i$  sont les constituant d'un vecteur  $\mathbf{s}$  réel :

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i \cdot \phi_i(t). \quad (4.3)$$

##### 4.1.1.3 Énergie d'un signal

L'énergie d'un signal donné  $s(t)$  nous est donnée par l'équation 4.4. Par contre, lorsqu'il nous est donné de connaître la composition du vecteur  $\mathbf{s}$ , il est dans ce cas préférable de passer via l'équation 4.5. Elle découle de la combinaison de l'équation 4.3 et 4.2 lorsqu'incorporées dans l'équation 4.4.

$$E = \int_0^T |s(t)|^2 dt \quad (4.4)$$

$$E = \sum_{i=1}^T |s_i|^2 \quad (4.5)$$

##### 4.1.1.4 Orthogonalité de signal

Deux signaux donnés  $x(t)$  et  $y(t)$  sont dit orthogonaux s'ils respectent l'équation 4.6. Lorsque combinés tel qu'on l'a fait pour développer l'équation 4.5, il nous est possible d'obtenir 4.7.

$$\int_0^T x(t)y^*(t)dt = 0 \quad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^T x_i y_i^* = 0 \quad (4.7)$$

---

<sup>1</sup>L'intégrale se faisant sur l'intervalle défini donné, sinon sur l'infinité.

#### 4.1.1.5 Distance euclidienne

La distance euclidienne est un concept des plus élémentaire mais joue un rôle clef dans la détermination de la performance d'un signal. En effet, avec certaines méthodes de détection de signaux, nous avons à calculer une distance, et la manière de faire vient de ce concept-ci. C'est que le concept même de la détection des signaux est basé sur celui des distances.

La distance  $d(x, y)$  entre deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  est donnée par l'équation 4.8. De la même façon que l'on dérive l'équation 4.7 de 4.6, on peut également arriver à la version donnée en équation 4.9.

$$d(x, y) = \sqrt{\int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt} \quad (4.8)$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2} \quad (4.9)$$

## 4.2 Détection de signaux

### 4.2.1 Le détecteur de maximum à posteriori

Également désigné détecteur MAP, le détecteur de maximum à posteriori a pour objectif la sélection optimale du signal parmi les  $M$  signaux transmis et reçu par ce que l'on représente par le vecteur stochastique  $\mathbf{r}$ . Posant,  $\mathbf{s}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, M$  comme étant l'ensemble des  $M$  signaux de modulation possible. Pour atteindre son objectif, le détecteur MAP doit faire correspondre l'information reçu  $\mathbf{r}$  avec un des  $M$  signaux de manière à minimiser la moyenne de la probabilité de prendre une mauvaise décision. Autrement dit, il faut maximiser la probabilité de faire le bon choix,  $P(c)$ , où  $P(c)$  correspond à l'équation<sup>2</sup> 4.10 où l'on a que  $\mathbf{R}$  constitue une occurrence du vecteur aléatoire  $\mathbf{r}$  et  $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{R})$  est la fonction de densité jointe du vecteur de réception aléatoire  $\mathbf{r}$ .

$$P(c) = \int_{-\infty}^{\infty} P(c|\mathbf{r} = \mathbf{R}) f_{\mathbf{r}}(\mathbf{R}) d\mathbf{R} \quad (4.10)$$

Par la définition de  $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{R})$  qui le décrit comme étant toujours positif, et considérant que le message transmis  $\mathbf{s}_t$ , pour  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$  cette minimisation consisterait également en la maximisation de l'équation 4.11.

$$\hat{\mathbf{s}}_{MAP} = \max_{i=1,2,\dots,M} P(\mathbf{s}_t|\mathbf{r} = \mathbf{R}) \quad (4.11)$$

Il est possible de réécrire la probabilité à posteriori pour obtenir l'équation<sup>3</sup> 4.12, où l'on obtiendra, entre autre,  $P(\mathbf{s}_t)$ , la probabilité à priori de la transmission du signal  $\mathbf{s}_t$ . Lorsque cette probabilité est égale pour les  $t$ , le système de détection MAP correspond à un receveur à vraisemblance maximal. On peut découvrir la formulation de cette variante en équation 4.13.

$$P(\mathbf{s}_t|\mathbf{r} = \mathbf{R}) = \frac{P(\mathbf{r}|\mathbf{s}_t) P(\mathbf{s}_t)}{P(\mathbf{r})} \quad (4.12)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{VM} = \max_{i=1,2,\dots,M} P(\mathbf{r}|\mathbf{s}_t) \quad (4.13)$$

<sup>2</sup>Ce type de calcul est à la source de l'équation 4.22.

<sup>3</sup>Cette équation est dérivée via la règle de Bayes présentée en sous section 5.1.3.1.

### 4.2.2 Le récepteur optimal pour canal à bruit additif blanc gaussien

Le canal, tel que décrit en sous-section 2.1.4, correspond à l'équation 4.14. La valeur du signal reçu correspond à  $r(t)$ , et les signaux transmis par modulation à  $s_i(t)$ .

$$\begin{aligned} r(t) &= s_i(t) + n(t) \\ i &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ce récepteur doit décider lequel des  $M$  signaux modulés possibles a été transmis en se basant sur l'information reçue  $r(t)$ . Le receveur optimal agissant avec un détecteur MAP se comporte tel qu'à la sous section précédente, mais puisqu'il y a équiprobabilité d'occurrence entre chacun des  $M$  signaux possibles, on se retrouve avec un détecteur à vraisemblance maximale procédant tel que décrit par l'équation 4.13. Ce dernier choisit la plus grande valeur suivant les probabilités d'occurrences données. On doit donc passer via l'équation 4.15 pour fonctionner.

$$\min_{i=1,2,\dots,M} l_i = \int_0^T [r(t) - s_i(t)]^2 dt \quad (4.15)$$

On peut voir la similarité entre l'équation 4.15 et la définition de la distance euclidienne en sous sous section 4.1.1.5. C'est donc qu'en sélectionnant la valeur minimale, on sélectionne le signal le plus près de la valeur du signal reçu. En développant le carré et en éliminant les termes n'affectant pas la minimisation, et en multipliant le résultat par  $1/2$ , on obtient l'équation 4.16. Si l'on analyse bien le résultat, on remarque que le second terme de l'égalité consiste en fait en l'énergie du signal tel que présenté en sous sous section 4.1.1.3. Ainsi, si les signaux sont émis avec *équipuissance*, il est possible de réduire le travail à l'équation 4.17. Le récepteur résultant est le récepteur présenté en figure<sup>4</sup> 4.2 qui comporte les corrélateurs, qui correspondent en fait à la partie de gauche de l'équation développée en 4.16. Notez bien que ce système de réception n'est valide que pour les suppositions faites en cours de route : équiprobabilité de transmission des signaux avec *équipuissance*.

$$\max_{i=1,2,\dots,M} l_i = \int_0^T r(t) \cdot s_i(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T (s_i(t))^2 dt \quad (4.16)$$

$$\max_{i=1,2,\dots,M} l_i = \int_0^T r(t) \cdot s_i(t) dt \quad (4.17)$$

## 4.3 Modulation d'amplitude en quadrature

### 4.3.1 Qu'est donc une modulation d'amplitude en quadrature ?

La modulation d'amplitude en quadrature est une modulation populaire beaucoup utilisée pour la modulation de signaux de télévision entre autres, dû à son débit élevé et son efficacité. Cette méthode de modulation incorpore à la fois une modulation en amplitude et une modulation en phase. Les signaux sortant de cette modulation se décrivent via l'équation algébrique 4.18 où  $a_i$  et  $b_i$  prennent des valeurs de l'ensemble  $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm \dots\}$ .

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \sqrt{E_p(t)} [a_i \cos(2\pi f_c t) + b_i \sin(2\pi f_c t)] \\ 0 \leq t \leq T, \quad i &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (4.18)$$

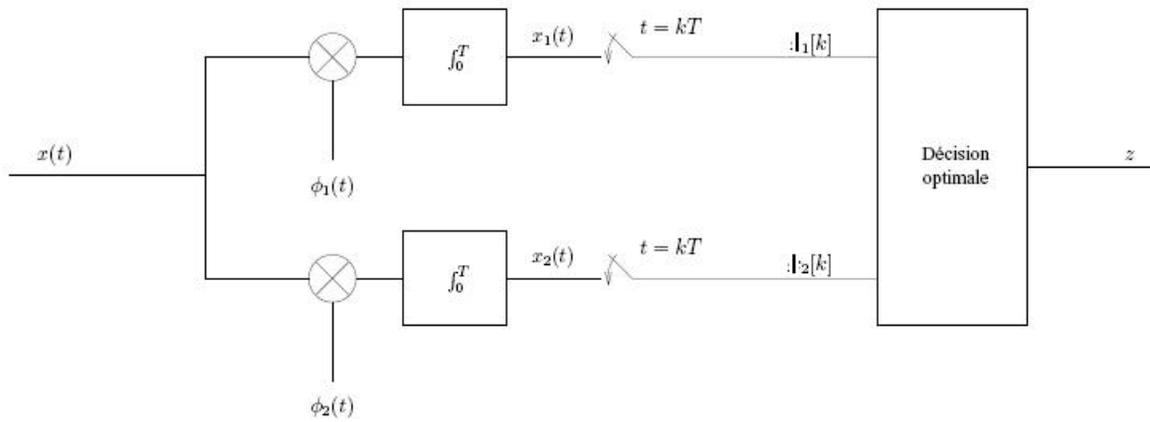


FIG. 4.2 – Récepteur optimal pour canal à bruit additif blanc gaussien à modulation binaire

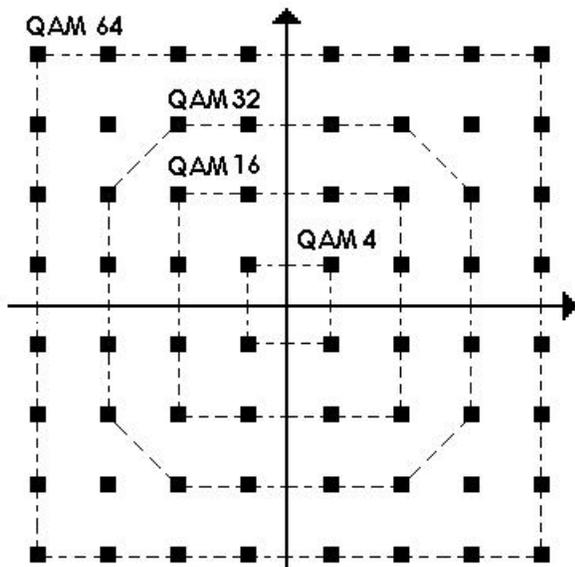


FIG. 4.3 – Constellation de diverses versions carrées de la modulation d'amplitude en quadrature

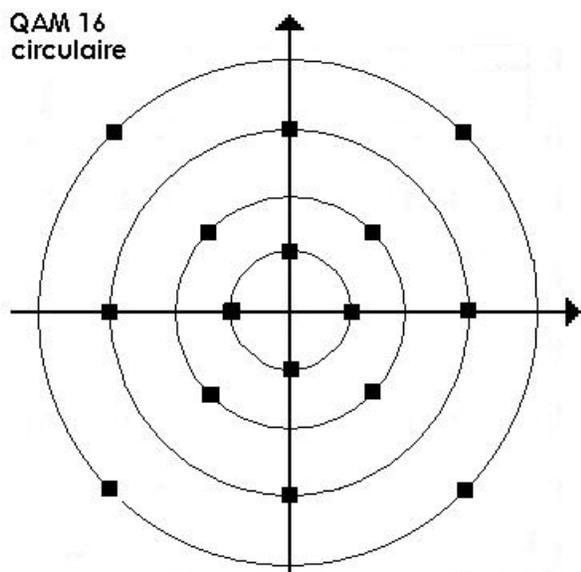


FIG. 4.4 – Constellation circulaire de la modulation d’amplitude en quadrature de niveau 16

Lorsque la modulation est représentable sous forme carrée, on dit que la porteuse en phase (cosinus) est indépendante de la porteuse en quadrature (sinus). Une forme carrée est obtenue lorsque  $k$  a une valeur paire. Ces  $k$  et  $M$  sont les mêmes que nous avons définis dans la section 4.1. Il vous est possible de consulter la figure 4.3 afin de visualiser un graphique de la constellation des points de divers niveaux de constellations carrées de la modulation d’amplitude en quadrature. Par contre, il existe diverses autres formes que la version carrée. En effet, il existe, entre autres, la forme circulaire dont la représentation de la version à 16 niveaux qui vous est présentée à la figure 4.4. On note dans cette même figure qu’il est très facile d’y distinguer les quatre différents niveaux énergétiques nécessaires à la modulation de ce type.

### 4.3.2 Performance de la modulation d’amplitude en quadrature

Comme on a pu le constater jusqu’à maintenant, on pourrait voir la modulation d’amplitudes en quadrature consiste en une modulation en amplitude sur deux versions du même signal sur lesquels une fonction sinusoïdale différente a été appliquée. On peut donc partir des informations que l’on connaît pour la modulation en amplitude au lieu de partir de rien. Dans le contexte d’un canal avec bruit additif blanc gaussien, comme c’est généralement le cas minimum dans toutes communications, le récepteur optimal pour des signaux de modulation d’amplitude en quadrature doit choisir un signal maximisant la valeur  $l_i$  dans l’équation 4.19.

$$l_i = a_i r_c + b_i r_s - \frac{\sqrt{E}}{4} (a_i^2 + b_i^2) \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} r_c &= r(t) p(t) \cos(2\pi f_c t) \\ r_s &= r(t) p(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

<sup>4</sup>Figure tirée de l’examen final du cours Gel 66801, *Communications Numériques Avancées*, Automne 2005

On en obtiendra une dérivation via le résultat pour le cas de la modulation simple d'amplitude, dans le présent cas, tout ce que l'on a de plus, c'est la présence d'une deuxième modulation en amplitude. D'où le résultat qui est présenté en équation 4.21.

$$P_e^{QAM} = 1 - \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3}{2(M-1)} \cdot \frac{E_{moyen}}{N_0}} \right) \right]^2 \quad (4.21)$$

## 4.4 Probabilité d'erreur

La probabilité d'erreur est la mesure de l'erreur sur la détection du signal perçu par rapport au message envoyé. C'est donc un calcul simple consistant à comparer les symboles reçus avec ceux envoyés, puis à diviser par le nombre de symboles envoyés. Il est également possible, préférable, de calculer la probabilité d'erreur de façon analytique. L'équation 4.22 permet ce calcul.

$$P_2 = \int_0^\infty P_e^{TypeMod}(\gamma) P_\gamma(\gamma) \partial\gamma \quad (4.22)$$

Cette équation fait intervenir deux éléments, soit la probabilité d'erreur de perception du symbole dû à la modulation et à la densité de probabilité du SNR et selon le type de combineur et la fonction de densité de probabilité de l'évanouissement. En effet,  $P_e^{TypeMod}(\gamma)$  correspond à la probabilité d'erreur suivant la modulation. Pour le cas DPSK, nous avons  $P_e^{DPSK}(\gamma) = \frac{1}{2}e^{-\gamma}$ , et pour le cas QPSK, on obtiendra  $P_e^{QPSK}(\gamma) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$  où  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} \partial t$ . Quant à la seconde partie,  $P_\gamma(\gamma)$ , elle fait intervenir la fonction de probabilité liée au modèle choisi pour représenter l'atténuation du signal ainsi que le type de combineur de signaux au récepteur.

## 4.5 Erreur quadratique moyennée

### 4.5.1 Qu'est donc l'erreur quadratique moyennée ?

L'erreur quadratique moyennée est un outil statistique permettant d'évaluer la qualité d'un estimateur. En temps normal, pour évaluer une estimation, on ne prendrait que la différence entre l'estimation et la valeur sortie réellement. Dans le contexte de l'erreur quadratique moyennée, nous prenons le carré de cette différence. On qualifie cette mesure de 'moyennée' parce que nous devons répéter l'opération sur  $n$  mesures et estimations de valeurs, et nous prenons donc la moyenne des erreurs quadratiques ainsi obtenues. Dans le cadre du présent travail, c'est cet outil d'évaluation d'estimateur qui est utilisé, nous allons donc voir un peu plus en détail cet outil. Avant d'examiner un exemple numérique, voyons tout d'abord une petite démonstration mathématique.

### 4.5.2 D'un point de vue mathématique<sup>5</sup>

On pose d'abord un estimateur  $\hat{\theta}$  d'un paramètre inconnu  $\theta$ , et  $E[\dots]$  comme étant la fonction d'espérance. On a alors pour définition de l'erreur quadratique moyennée :

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right]. \quad (4.23)$$

<sup>5</sup>On désignera l'application de l'erreur quadratique moyennée par son acronyme anglophone dans les équations, c'est à dire MSE, pour *mean squared error*.

On remarque bien la différence qui est prise entre l'estimateur et la valeur à estimer, qui est mise au carré, et dont on prend la moyenne, tel que décrit dans la sous section 4.5.1. Suite au développement du carré à l'intérieur de l'espérance et de quelques manipulations algébriques, où l'on pose entre autre que  $\text{biais}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$ , on arrivera à l'équation 4.24.

$$MSE(\hat{\theta}) = VAR[\hat{\theta}] + (\text{biais}(\hat{\theta}))^2 \quad (4.24)$$

Avant de passer à des considérations numériques du sujet, nous allons tenter de le voir de façon légèrement plus tangible. On posera donc un échantillon de  $n$  valeurs de variables aléatoires distribuées de façon gaussienne  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Un estimateur connu est souvent utilisé pour évaluer  $\sigma^2$  que l'on nomme l'estimateur de vraisemblance maximale. Il vous est présenté en équation 4.25, où  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)$ .

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.25)$$

On notera que dans cet estimateur le biais n'est pas de zéro, mais la variance est petite. L'estimateur 4.26 quant à lui, à un biais nul, mais sa variance est plus grande. Le premier estimateur demeure toutefois meilleur puisque ayant une erreur quadratique moyennée inférieure au second estimateur. C'est sans doute dû au fait que la plus petite variance compense amplement pour le biais.

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.26)$$

### 4.5.3 D'un point de vue numérique

$X$	Valeur $Y$	Estimé $\hat{Y}$	Erreur $(\hat{Y} - Y)$	Erreur absolue $ \hat{Y} - Y $	$(\hat{Y} - Y)^2$
12	33	34	1	1	1
14	36	34	-2	2	4
17	39	39.5	0.5	0.5	0.25
19	42	41	-1	1	1
21	45	46	1	1	1

TAB. 4.1 – Exemple numérique de l'erreur quadratique moyennée

Il vous est possible de consulter la table 4.1 afin de voir comment l'on a procédé pour un exemple numérique. On voit que pour chaque valeur de  $X$ , on a un  $Y$ . On a également fait un estimé sur chacune des valeurs de  $Y$  que l'on aurait à chaque  $X$ .

Avec les valeurs d'erreurs au carré que l'on a obtenues, nous devrions sélectionner la valeur pour  $X = 17$  puisque cette valeur nous donne l'erreur la plus petite. Notez par contre que la dernière colonne du tableau n'est pas encore l'erreur quadratique moyennée, mais seulement l'erreur quadratique. Afin d'obtenir l'erreur quadratique moyennée, il nous faut sommer les valeurs de la dernière colonne, 7.25, puis diviser par le nombre de valeur et alors on a 1.45. On obtient donc une valeur d'erreur quadratique moyennée de 1.45 pour cet estimateur. On pourrait refaire la même procédure avec d'autres estimateurs (d'autres tableaux aux valeurs

correspondants à d'autres estimateurs) et comparer les erreurs quadratiques moyennées. La plus petite erreur quadratique moyennée<sup>6</sup> correspondrait au meilleur estimateur.

---

<sup>6</sup>ie. : le critère de variance minimale



# Chapitre 5

## Limites d'une transmission

The Murphy Philosophy : "Smile... tomorrow will be worse."

### 5.1 Théorie de l'information

#### 5.1.1 Le contenu informationnel de Shannon

Le contenu informationnel de Shannon d'une occurrence  $x$  est défini tel que dans l'équation 5.1. Cette valeur est mesurée en bits et utilise la probabilité d'occurrence de l'événement  $x$ .

$$h(x) = \log_2 \frac{1}{P(x)} \quad (5.1)$$

#### 5.1.2 Entropie

La mesure de l'entropie d'un ensemble  $X$  est définie tel qu'étant la moyenne du contenu informationnel de Shannon pour chacun des événements de l'ensemble. L'équation 5.2 décrit cette définition, notez que lorsque la probabilité d'un événement est nulle, le logarithme donnera également zéro. Aussi, l'entropie de l'ensemble est noté en bits, et est quelques fois désignée comme étant l'incertitude de  $X$ .

$$H(X) = \sum_{x \in A_X} P(x) \log \frac{1}{P(x)} \quad (5.2)$$

#### 5.1.3 Inférence

##### 5.1.3.1 Règle de Bayes

La règle de Bayes permet le calcul de probabilité d'un événement A en ayant connaissance de la probabilité de certains autres événements dont l'événement A dépend. Notez d'abord que les termes *a priori* et *a posteriori* sont souvent utilisés pour désigner les probabilités  $P(A_i)$  et  $P(A_i|B)$  respectivement.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{P(B|A_1) P(A_1) + \dots + P(B|A_n) P(A_n)} \quad (5.3)$$

Où  $P(A|B)$  désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B. L'équation régissant cette probabilité conditionnelle se résume à  $P(BA) = P(A|B) P(A)$ .

### 5.1.3.2 Théorème de la probabilité totale

Le théorème de la probabilité totale se résume à l'équation suivante :

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n). \quad (5.4)$$

### 5.1.4 Théorème du codage de Shannon

Shannon a également postulé un théorème important concernant le codage d'informations qui dit que lorsque  $X$ , un ensemble avec une entropie de  $H(X) = H$  bits et  $\varepsilon > 0$  ainsi que  $0 < \delta < 1$ , il existe alors un nombre entier positif  $N_0$  tel que  $N > N_0$ , suivant la règle :

$$\left| \frac{1}{N} H_\delta(X^N) - H \right| < \varepsilon. \quad (5.5)$$

## 5.2 Théorème sur la capacité

Shannon a également émis un théorème concernant la capacité maximale d'informations communicable lors d'une transmission. Ce théorème nous dit qu'il y a un maximum, désigné par capacité du canal, qui indique le taux auquel tout système de communications peut opérer de manière satisfaisante quant à la qualité avec contrainte de puissance. On désigne ici par qualité le niveau de probabilité d'erreur. Ce théorème s'applique à tout type de communications, d'où sa force. Elle permet de désigner les limites que l'on peut atteindre sans même avoir les technologies pour l'atteindre, pour le moment. Plus mathématiquement, on peut énoncer qu'il existe une variable  $C_N$  telle que

$$C_N = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + 2 \frac{E_N}{N_0} \right) \quad (5.6)$$

où  $C_N$  est la capacité de canal gaussien. La preuve de ce théorème est faite dans le volume de Wozencraft[3]. Il nous est également possible de le représenter sous la forme du théorème de Shannon-Hartley où  $C = B \log_2(1 + SNR)$ , où  $B$  est la bande du signal et  $C$  est la capacité en bits par secondes. Graphiquement, cette version vous est présentée à la figure 5.1. Un développement mathématique supplémentaire permet d'établir une formulation équivalente mais tenant compte de l'efficacité de la bande passante, où  $\eta = \frac{\text{Taux de transmission}}{\text{Bande passante du canal}} [\text{bits/s/Hz}]$ , ainsi on obtiens  $\eta_{max} = \log_2(1 + SNR)$ . Des manipulations supplémentaires nous amènent à ce que l'on désigne par la borne de Shannon qui vous est décrite en équation 5.7. Ainsi, lorsque  $\eta_{max}$  tend vers zéro, on a que la partie de droite de 5.7 devient  $\ln(2)$ .

$$\frac{E_b}{N_0} \geq \frac{2^{\eta_{max}} - 1}{\eta_{max}} \quad (5.7)$$

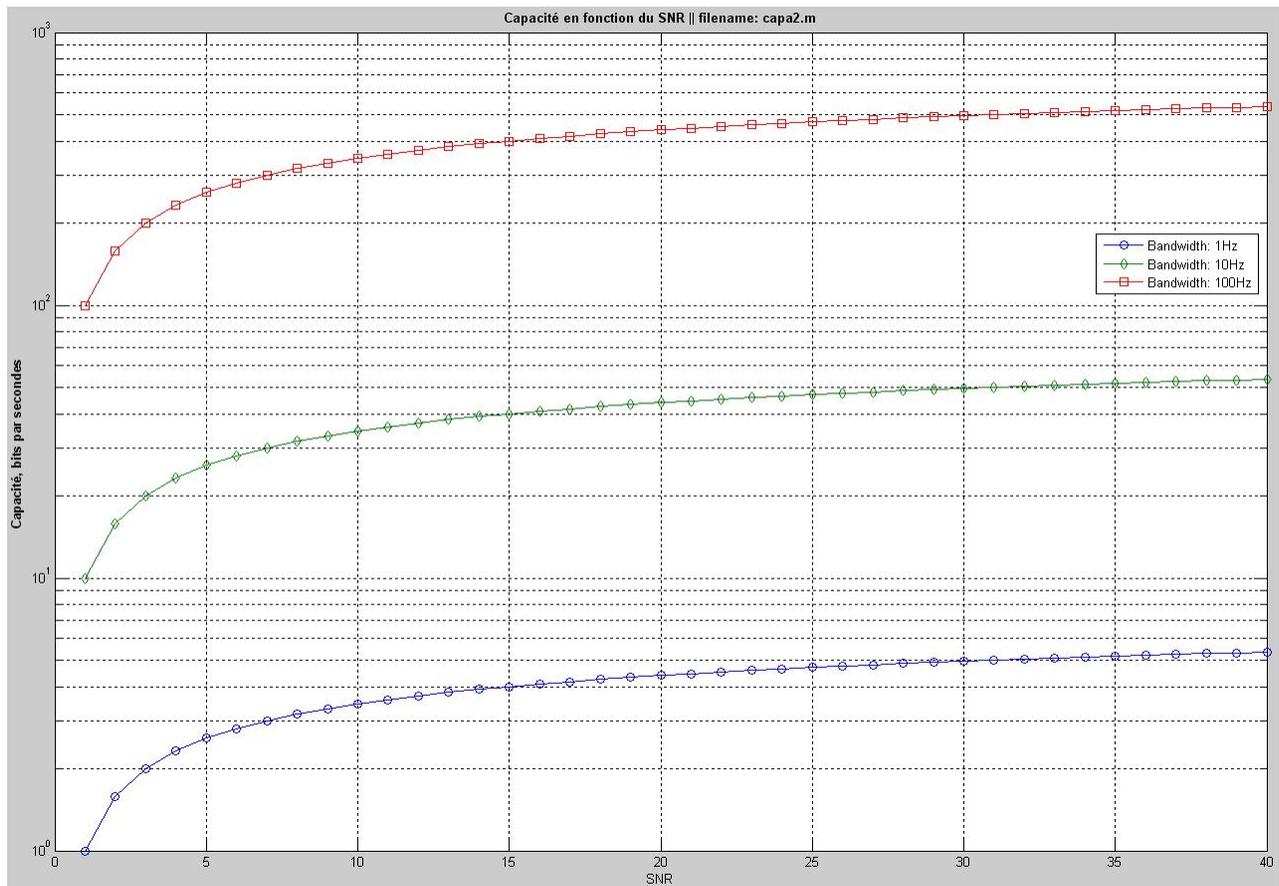


FIG. 5.1 – Capacité d'une transmission en fonction du SNR



# Chapitre 6

## La diversité

”Keep your friends close, but keep your enemies closer” - Al Pacino

### 6.1 Généralité

La diversité est une technique utilisée pour combattre l'évanouissement. Le principe sous-jacent est de transmettre plusieurs répliques de la même information sur plusieurs canaux ayant des puissances comparables et des évanouissements indépendants, et donc, il est fort probable qu'au moins un, ou plus, des signaux reçus ne soit pas atténué à un moment donné, rendant possible une transmission de bonne qualité. Deux principales catégories de diversité existent, la catégorie explicite, et la catégorie implicite. La première catégorie consiste à transmettre d'une manière ou une autre, plusieurs répliques du même message. La seconde catégorie, quant à elle, consiste à n'envoyer qu'une copie, mais à compter sur des concepts tel que le multiparcours pour obtenir plusieurs versions du signal envoyé. En pratique, les différents "canaux" ne sont pas totalement décorrélés, et donc, une diversité parfaite n'est pas toujours accessible. Il a toutefois été documenté dans la littérature qu'une inter corrélation entre canaux<sup>1</sup> de 0.7 est suffisante pour atteindre un gain de diversité raisonnable. Pour la diversité spatiale, par exemple, il faut une distance, entre les antennes, qui soit plus grande que la distance cohérente. De même, pour la diversité fréquentielle, une séparation fréquentielle supérieure à la cohérence de la bande passante est nécessaire. Lors de présence de plusieurs antennes à la réception, une combinaison des signaux reçus est nécessaire, pour cela, plusieurs méthodes existent, tel qu'on le verra dans la section 6.3.

### 6.2 Types de diversité

On connaît plusieurs techniques de diversité et combinaison de techniques de diversité, mais voici les principales techniques.

#### 6.2.1 Diversité spatiale

La diversité spatiale, aussi connue sous le nom de diversité d'antenne, ou diversité matricielle est l'une des techniques les plus anciennes. Elle est facile d'implémentation et ne requière pas de ressources fréquentielles supplémentaires. L'objectif est d'avoir plusieurs antennes séparées d'une distance suffisante pour avoir dé-corrélation de canal. Il faut donc avoir un espacement suffisant. La distance nécessaire dépend de divers

---

<sup>1</sup>suivant les circonstances et certaines conditions

éléments, soit du terrain, de l'environnement, de l'antenne elle-même, ses dimensions, etc. Lorsque le canal est connu, le transmetteur peut aussi utiliser ce type de diversité. Sinon, il en profitera via la diversité transformée tel qu'on verra en sous section 6.2.8.

### 6.2.2 Diversité de polarisation

Cette technique peut être utilisée de façon explicite ou implicite par l'usage de polarisation orthogonale, puisque ceci démontre une faible corrélation d'évanouissement, et donc, offre un potentiel de diversité. Par contre, il n'est possible d'utiliser cela que par deux antennes, puisque l'on ne connaît que deux plans de polarisation à ce jour<sup>2</sup>. Il est donc ainsi possible d'émettre une puissance par branche inférieure de 3dB lorsque la polarisation est utilisée. Lorsque utilisée implicitement, cette technique demande au récepteur l'analyse des ondes sur les deux plans même s'il n'est émis que sur un plan de polarisation. Un avantage comparatif de cette technique par rapport à la diversité spatiale est que l'on n'a pas besoin d'autant d'espace entre les antennes, ce qui est hautement attractif pour les unités mobiles.

### 6.2.3 Diversité angulaire

Cette technique est grandement reliée à la diversité spatiale, elle implique que lorsque les faisceaux émis par les antennes sont suffisamment séparés angulairement, il est possible que le niveau de corrélation soit assez bas pour profiter d'un degré de diversité. Cette technique est surtout utilisée pour les réseaux Internet sans-fil domestiques<sup>3</sup> pour accroître la capacité en débit du réseau.

### 6.2.4 Diversité fréquentielle

Cette technique, de catégorie explicite, demande l'envoi du même signal sur des fréquences différentes. Il faut toutefois faire attention à la largeur de bande cohérente et à l'étendue fréquentielle due au multiparcours et aux distances à franchir par la transmission. On doit par contre faire également attention à la bande de fréquence disponible pour l'utilisation de cette technique qui est exigeante de ce côté.

### 6.2.5 Diversité de parcours

Cette technique implicite est utilisable lorsque la largeur de bande du signal est plus grande que la largeur de bande cohérente du canal. C'est la technique derrière le multiparcours, où le récepteur profite de la présence de plusieurs versions du signal pour obtenir un gain en diversité.

### 6.2.6 Diversité temporelle

Lorsque l'on sépare l'envoi du même signal par le temps cohérence du canal, il est possible de profiter de diversité temporelle. Tout dépend également de la vitesse de dépalcement du mobile et de la fréquence porteuse. Il faut toutefois que la vitesse du mobile demeure assez élevée ou que les délais entre les signaux restent suffisamment grands.

### 6.2.7 Diversité spatio-temporelle

La diversité spatio-temporelle est un exemple de combinaison de techniques de diversité. En effet, cette technique envoie deux versions de signal différées dans le temps via deux antennes transmetteurs. Ainsi, on

---

<sup>2</sup>Notez que l'auteur travail à trouver un ordre supérieur de polarisation dans ses temps libres. C'est un travail très prenant, mais également très prometteur! :)

<sup>3</sup>devrait retrouver la référence menant à cette affirmation

atteint un niveau de diversité plus aisé. Alamouti fut le premier à développer le codage de blocs spatio-temporel dans son article "A simple transmit diversity technique for wireless communications", parut dans IEEE J. Select. Areas Comm., Vol 16, pp. 1451-1458, d'octobre 1998. On n'ira pas plus en détails sur ce sujet dans le présent document, il vous est toutefois possible de consulter une vulgarisation complète sur le sujet à l'adresse Internet suivante :

[HTTP://WWW.GEL.ULaval.CA/~DJIKNA/FICHIERS/PROJET\\_GEL60364\\_ALAMOUTI\\_SC.PDF](http://www.gel.ulaval.ca/~djikna/fichiers/PROJET_GEL60364_ALAMOUTI_SC.PDF)

### 6.2.8 Diversité transformée

Dans ce cas-ci, la diversité spatiale est transformée au transmetteur par d'autres formes de diversité utilisables par le récepteur. Ceci est surtout utilisé lorsque le canal n'est pas connu du transmetteur, le problème est alors renvoyé au processus de combinaison qui devrait avoir connaissance du canal.

#### 6.2.8.1 Espace à fréquence

Une première version de ce sous-type consiste en délai d'antenne, c'est à dire que le signal est transmis sur plusieurs antennes avec des délais différents. Les différentes transmissions émulent alors l'arrivée par plusieurs antennes. La seconde version consiste en la modulation multi porteuses où le flot d'informations, après codage approprié, est modulé avec une transformée discrète de Fourier inverse. Les porteuses réfèrent ensuite à plusieurs antennes. Ainsi, la diversité spatiale est transformée en diversité fréquentielle et la diversité doit se faire au codage.

#### 6.2.8.2 Espace à temps

Une version de ce sous-type de diversité consiste à coder l'information, puis à l'envoyer par une antenne choisie aléatoirement. Ainsi, l'évanouissement sélectif spatial au transmetteur est converti en évanouissement temporel au récepteur. Une autre version consisterait à procéder par codage spatio-temporel. En effet, le signal reçu de différentes antennes est une superposition de multiples messages transmis, et donc le récepteur aura un décodage à effectuer. Il est donc possible d'obtenir un gain en diversité via les branches ainsi décorréées. Cette technique correspond à ce que l'on a désigné par la technique de diversité spatio-temporelle en sous section 6.2.7.

## 6.3 Type de combinaison

Plusieurs techniques de combinaisons sont connues, mais on ne vous présentera ici que les trois principales méthodes utilisées.

### 6.3.1 Combinaison par sélection

Technique la plus simple, et probablement la plus utilisée, elle consiste à choisir simplement le signal de la branche ayant le ratio signal à bruit<sup>4</sup>, le plus élevé. Le problème avec cette technique est qu'il est possible d'obtenir le signal ayant le plus d'interférences. Ne connaissant pas le signal transmis d'avance, il est difficile de connaître la part des interférences dans le SNR d'une branche.

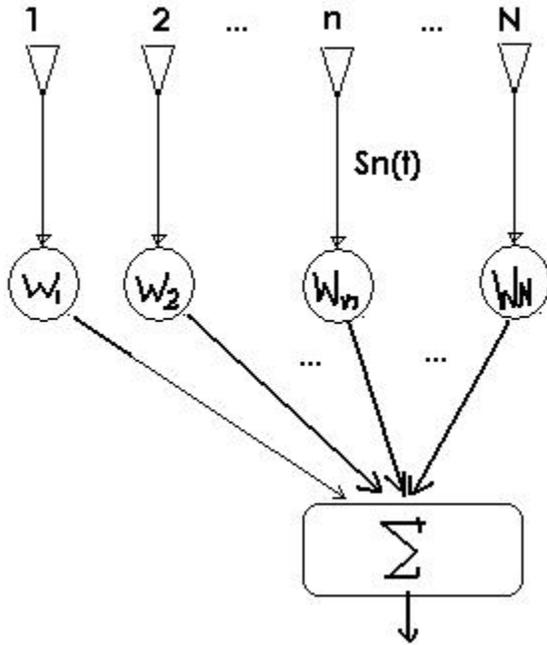


FIG. 6.1 – Schéma général du processus de combinaison

Supposons que l'enveloppe du signal suit une fonction de densité de probabilité de Rayleigh. Si l'on définit  $\gamma_i$  comme étant la puissance instantanée du signal dans chaque branche, divisé par la moyenne de la puissance du bruit, donc le SNR instantané, et  $\Gamma$  comme étant la moyenne de la puissance du signal dans chaque branche divisé par la moyenne de la puissance du bruit, donc le SNR a alors la probabilité d'être soit plus petit ou égale à une valeur spécifique  $\gamma_s$ , donnée par  $\Pr[\gamma_i \leq \gamma_s] = 1 - e^{-\gamma_s/\Gamma}$ . Il s'en suit que la probabilité que tout les  $\gamma_i$ , indépendants, soit simultanément inférieur à la valeur  $\gamma_s$  spécifiée est décrite par  $\Pr[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M \leq \gamma_s] = [1 - e^{-\gamma_s/\Gamma}]^M$ , où  $M$  y désigne le nombre de branches du récepteur. La moyenne de  $\gamma_s$  suit  $E[\gamma_s] = \Gamma \sum_{k=1}^M \frac{1}{k}$ . Si l'on considère la figure<sup>5</sup> 6.1, cette méthode correspondrait seulement à sélectionner la branche au meilleur SNR.

Ayant obtenu la fonction de distribution de probabilité, on peut en déduire la fonction de densité de probabilité, et au moyen de l'équation 4.22. On pourra calculer la probabilité d'erreur en fonction d'une modulation, de la combinaison choisie et de la fonction de densité de probabilité que suit l'atténuation. En présence de modulation BPSK, la probabilité d'erreur suit la fonction 6.1.

$$P_{BPSK}^{SC} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\Gamma}{1+\Gamma}} \right) \quad (6.1)$$

<sup>4</sup>Le ratio signal sur bruit est désigné par SNR à travers tout le document.

<sup>5</sup>Pour les gens connaissant le domaine des réseaux de neurones, ils sont en mesure de voir la similitude d'un neurone artificiel avec cette figure.

### 6.3.2 Combinaison par ratio maximal

Cette technique nécessite que les  $M$  branches soient alignées en phases<sup>6</sup>, puis pondérées proportionnellement au niveau du signal avant leur sommation. La distribution d'une telle méthode suit l'équation 6.2. Il est démontré que c'est une méthode optimale de combinaison. On le comprend mieux en visualisant l'équation 6.3. Si l'on considère la figure 6.1, cette méthode correspondrait donc à sommer toutes les branches en calibrant les poids  $W_n$  selon le niveau de SNR. En présence de modulation BPSK, la probabilité d'erreur suit la fonction décrite à l'équation 6.4<sup>7</sup>.

$$\Pr [\gamma \leq \gamma_m] = 1 - e^{(-\gamma_s/\Gamma)} \sum_{k=1}^M \frac{(\gamma_m/\Gamma)^{k-1}}{(k-1)!} \quad (6.2)$$

$$E [\gamma_m] = M\Gamma \quad (6.3)$$

$$P_{BPSK}^{MRC} = \frac{1}{(N-1)!} \left( \frac{1 - \left( \sqrt{\frac{\Gamma}{1+\Gamma}} \right)}{2} \right)^N \sum_{n=0}^N \frac{(N-1+n)!}{n!} \left( \frac{1 + \left( \sqrt{\frac{\Gamma}{1+\Gamma}} \right)}{2} \right)^2 \quad (6.4)$$

### 6.3.3 Combinaison par gain égal

Cette méthode consiste simplement en une sommation après co-phasage de bande. Sa distribution se comporte de façon similaire à la méthode précédente et sa moyenne se comporte comme en équation 6.5. Si l'on considère la figure 6.1, cette méthode correspondrait donc à sommer toutes les branches en calibrant les poids  $W_n$  à un niveau égal, ou à  $\frac{1}{N}$ , par exemple.

$$E [\gamma_e] = \Gamma \left[ 1 + \frac{\pi}{4} (M-1) \right] \quad (6.5)$$

---

<sup>6</sup>co-phasées

<sup>7</sup>NB. la mise au carré en fin d'équation doit être revérifiée.



## Troisième partie

Capacité d'une communication sous  
atténuation de Rayleigh



# Mise en contexte et hypothèses d'analyse

Les systèmes de communications, avec traitements appropriés, peuvent utiliser de la diversité d'antenne (angulaire, spatiale, ou de polarisation) pour établir de multiples canaux indépendants sur la même largeur de bande. Avec traitement et combinaison optimale de  $M$  antennes, il est possible d'éliminer les interférences de  $M - 1$  interféreurs. Par contre, des techniques existent pour améliorer encore plus les performances.

L'article [1] étudie deux systèmes élémentaires, soit la communication entre plusieurs stations mobiles et une station de base à antennes multiples. Puis, la communication entre deux stations ayant de multiples antennes. Pour ces deux configurations de systèmes, nous déterminerons la capacité théorique et l'indice d'efficacité<sup>8</sup> pour différentes techniques de traitement.

Les conditions des multiples parcours sont variables étant donnée la variabilité des positions, des capacités, de la corrélation, etc. C'est donc la distribution de la capacité qui sera à l'étude. Cela sera fait avec une probabilité de perte de signal<sup>9</sup> fixé à  $10^{-3}$  et un taux d'erreurs de  $10^{-4}$ . On fait également l'hypothèse de canaux à évanouissements uniformes, indépendants, non dispersifs, de Rayleigh, avec contrainte de puissance.

Donc, deux cas seront à l'étude dans les deux prochains chapitres. Le premier étant la capacité par station mobile lorsque  $N$  mobiles se connectent à une station de base ayant  $M$  antennes. Le second étant quant à lui le cas avec deux stations mobiles de  $M$  antennes, sans station de base.

Notez que M. Winters s'est également imposé une limitation quant au nombre d'antenne  $N$  par rapport au nombre d'antennes  $M$ . En effet, il ne présente aucune simulation avec  $N > M$ . D'où quelques différences avec mes simulations, étant donné que j'ai voulu explorer la situation où  $N$  est supérieur à  $M$ .

---

<sup>8</sup>On entend par là, le débit maximal pour un taux d'erreur, en bits/s/Hz.

<sup>9</sup>Désigné en anglais par l'*Outage Probability*.



# Chapitre 7

## Station de base à $M$ antennes en présence de $N$ mobiles

”There is no substitute for hard work.” Thomas Alva Edison

### 7.1 Description du système

Le cas présentement à l'étude consiste en  $N$  stations mobiles d'une antenne chacune ainsi que d'une station de base avec  $M$  antennes. Une représentation schématique nous est dévoilée en figure 7.1. Le système de communications d'un tel contexte peut bien sûr être vu d'un point de vue vectoriel, tel que dans les prochains paragraphes et équations, ou à la figure 7.2.

Nous avons donc un système à  $N$  flots de données indépendants représentés par  $\mathbf{A}_n$ , tel qu'en équation 7.1, où les composantes sont des éléments complexes. La modulation du système en question utilise la modulation à quadrature d'amplitude où les valeurs du vecteur  $\mathbf{A}_n$  prennent des valeurs de  $[\pm 1, \pm 3, \dots \pm (L-1)]/\sigma_d$ , où  $\sigma_d^2$  étant la valeur de la puissance moyenne des symboles.

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{N,n} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Le vecteur d'informations transmis est  $\mathbf{P}\mathbf{A}_n$ , où  $\mathbf{P}$  représente la matrice de transmission  $N \times N$ . Ce vecteur n'a que des valeurs non nulles sur la diagonale puisqu'aucune information ne voyage entre les stations mobiles. Ainsi, la puissance du  $i$ -ième signal transmis est représentée par  $P_i$  et est obtenue via l'équation 7.2. Avec  $\mathbf{P}$  étant donné par l'équation 7.3, on est en mesure de calculer les  $P_i$  en combinant ces deux équations.

$$P_i = [\mathbf{P}^H \mathbf{P}]_{ii} \quad i = 1, N \quad (7.2)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{P_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{P_N} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

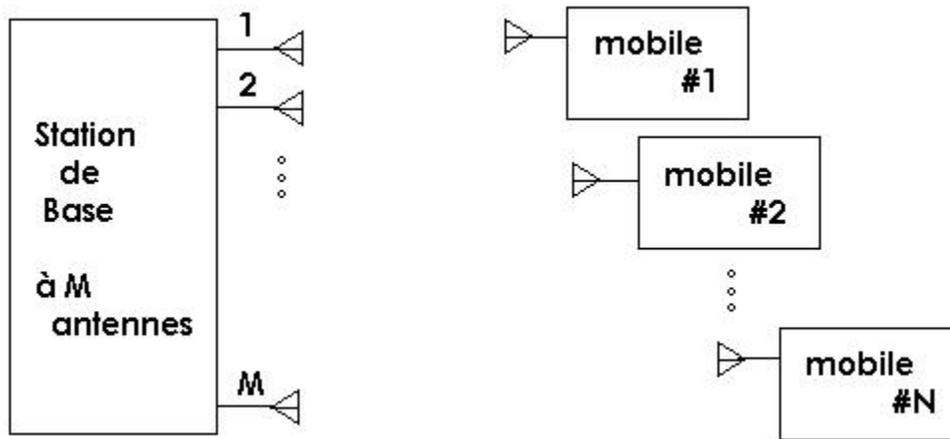
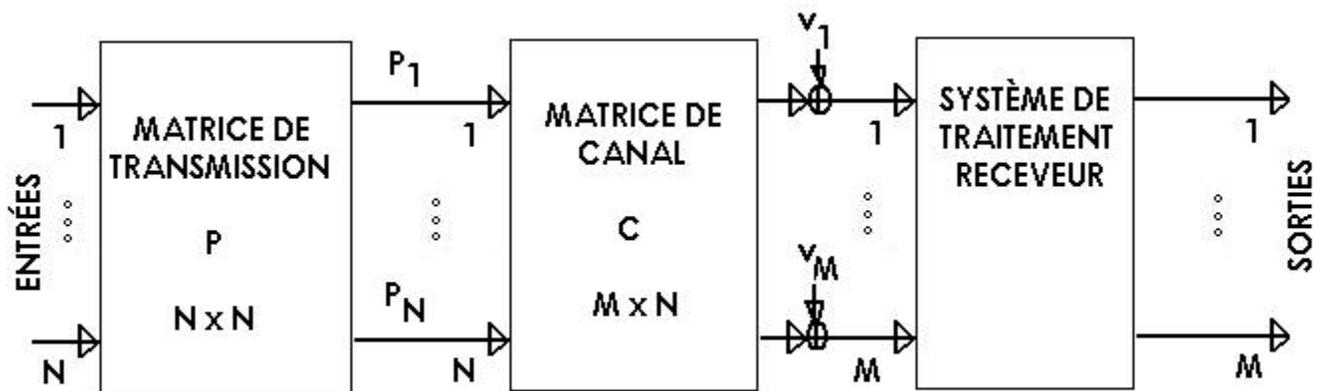
FIG. 7.1 – Schéma d'un système de communications avec une base à  $M$  antennes et  $N$  mobiles

FIG. 7.2 – Représentation vectorielle de la figure 7.1

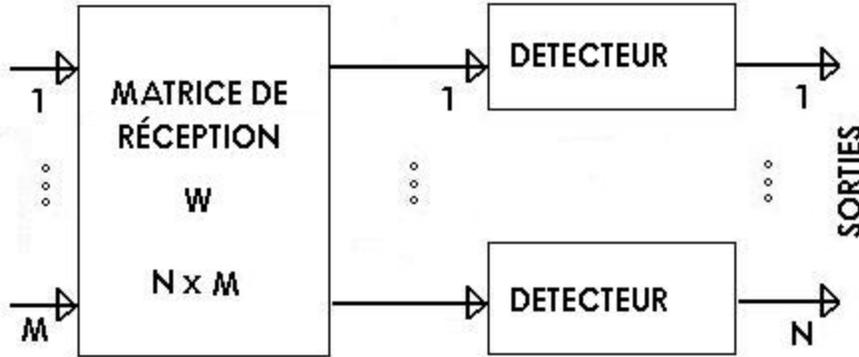


FIG. 7.3 – Schéma d'un système de traitement linéaire au receveur

En plus des hypothèses de travail posées plus tôt, on applique une contrainte supplémentaire consistant en une limitation de puissance à tous les mobiles, tel que l'on obtient

$$P_i \leq 1 \quad i = 1, N \quad (7.4)$$

Le signal doit ensuite être passé par la matrice  $M \times N$  du canal de Rayleigh, où les composantes sont complexes de nature gaussiennes à moyenne nulle et variance<sup>1</sup> de  $1/2$ . C'est ensuite suivi de l'addition du vecteur, de valeurs indépendantes, de bruit blanc gaussien complexe, tel qu'en équation 7.5, où la moyenne est nulle et la variance de valeur  $\sigma_n^2/2$ . On a donc un signal de réception tel que présenté en équation 7.6. Ce signal reçu est ensuite traité pour obtenir une estimation du signal envoyé, c'est à dire, un vecteur  $\hat{\mathbf{A}}_n$ .

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} v_{1,n} \\ \vdots \\ v_{M,n} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{A}_n + \mathbf{v}_n \quad (7.6)$$

## 7.2 Traitement linéaire optimal

Nous considérons maintenant la situation où nous avons un traitement linéaire à la station de base tel qu'un traitement linéaire au récepteur devient tel que présenté à la figure 7.3. On y constate que les signaux reçus sont combinés par une matrice de réception  $\mathbf{W}$  de dimensions  $N \times M$ . On a ainsi une  $n$ -ième sortie du traitement équivalent à l'équation 7.7.

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{W} [\mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{A}_n + \mathbf{v}_n] \quad (7.7)$$

<sup>1</sup>Afin d'obtenir une puissance moyenne égale entre la réception et la transmission.

Un système de prise de décisions estime  $\widehat{\mathbf{A}}_n$  en utilisant les parties réelles et imaginaires de  $\mathbf{Z}_n$  en considérant la modulation en quadrature d'amplitude de  $L$  niveaux. La procédure consistera à sélectionner une sortie par minimisation de l'erreur quadratique de chacun des signaux. Ainsi,  $\mathbf{W}$  maximise le SNR<sup>2</sup>, minimise le MSE<sup>3</sup> et la borne supérieur du BER<sup>4</sup>.

L'erreur quadratique moyennée, ainsi que la modulation en quadrature d'amplitude et le traitement linéaire optimal se reflètent dans l'équation 7.8. Où l'on a  $\rho$  qui consiste en un ratio signal à bruit simple ( $\rho = \sigma_d^2/\sigma_n^2$ ), c'est à dire dans le contexte d'un canal à évanouissement de Rayleigh seulement.

$$MSE_i = \frac{\overline{MSE_i}}{\sigma_d^2} = [\mathbf{I} + \mathbf{P}^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P} \rho]_{ii}^{-1} \quad i = 1, N \quad (7.8)$$

Pour chacun des  $N$  signaux, le débit supporté à un taux d'efficacité donnée,  $P_e$ , est donné par l'équation 7.9, où l'on a  $\mu_i = (1 - MSE_i) / MSE_i$ <sup>5</sup>.

$$I_i = \log_2 \left( 1 + 1.5\mu_i / \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right) \quad i = 1, N \quad (7.9)$$

Lorsque l'on a  $N = 1$ , l'indice d'efficacité est la plus élevé pour  $P_1 = 1$ . On respecte bien entendu la contrainte de puissance de l'équation 7.4. On en obtiendra donc, par manipulations mathématiques des équations précédentes, l'équation donné en 7.10. Où l'on a  $\mathbf{C}^H \mathbf{C}$  qui est alors une fonction de densité de probabilité de forme chi carré de degré  $2M$ . Ainsi, la fonction de densité de probabilité correspond à l'équation 7.11.

$$I_1 = \log_2 \left( 1 + 1.5\rho \mathbf{C}^H \mathbf{C} / \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right) \quad (7.10)$$

$$p(\mathbf{C}^H \mathbf{C}) = \frac{(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{M-1} e^{-\mathbf{C}^H \mathbf{C}}}{(M-1)!} \quad (7.11)$$

En passant par ces deux équations, il est possible d'en déterminer la probabilité de l'indice d'efficacité tel qu'en équation 7.12, où l'on a que  $\alpha$  correspond à l'équation 7.13.

$$P(I_1) = \frac{(2^{I_1} - 1)^{M-1} e^{-(2^{I_1}-1)/\alpha} 2^{I_1} \ln 2}{\alpha^M (M-1)!} \quad (7.12)$$

$$\alpha = 1.5\rho / \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \quad (7.13)$$

De là, on peut en obtenir la distribution de la probabilité que l'on présente en équation 7.14. On peut également en obtenir la représentation graphique donné en figure<sup>6</sup> 7.4.

$$P(I_1) = 1 - e^{-(2^{I_1}-1)/\alpha} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\left( \frac{2^{I_1}-1}{\alpha} \right)^k}{k!} \quad (7.14)$$

<sup>2</sup>Signal to Noise Ratio : ratio signal sur bruit

<sup>3</sup>Mean Squared Error : erreur quadratique moyennée

<sup>4</sup>Bit Error Rate : taux de bit d'erreur

<sup>5</sup>L'article présentait une erreur dans cette équation, en effet, elle multipliait au lieu de diviser...

<sup>6</sup>Les figures réalisées dans matlab par l'auteur devraient aussi être en pièce jointe avec le code matlab correspondant.

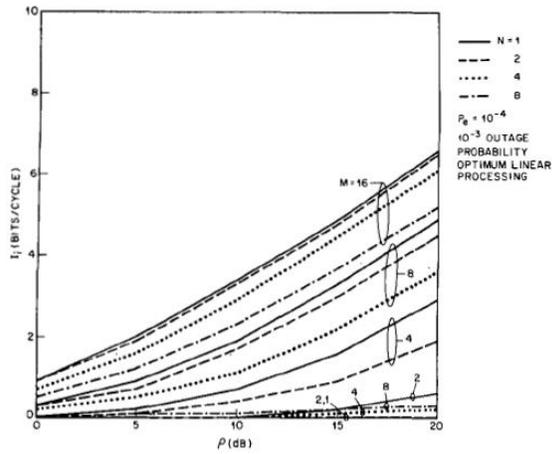


Fig. 4. The efficiency index per remote versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate for optimum linear processing at the base station receiver;  $N$  remotes and  $M$  antennas at the base station.

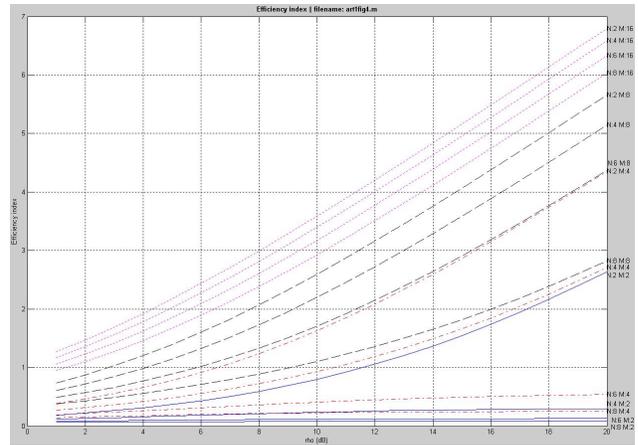


FIG. 7.4 – Indice d'efficacité par mobile en fonction de  $\rho$

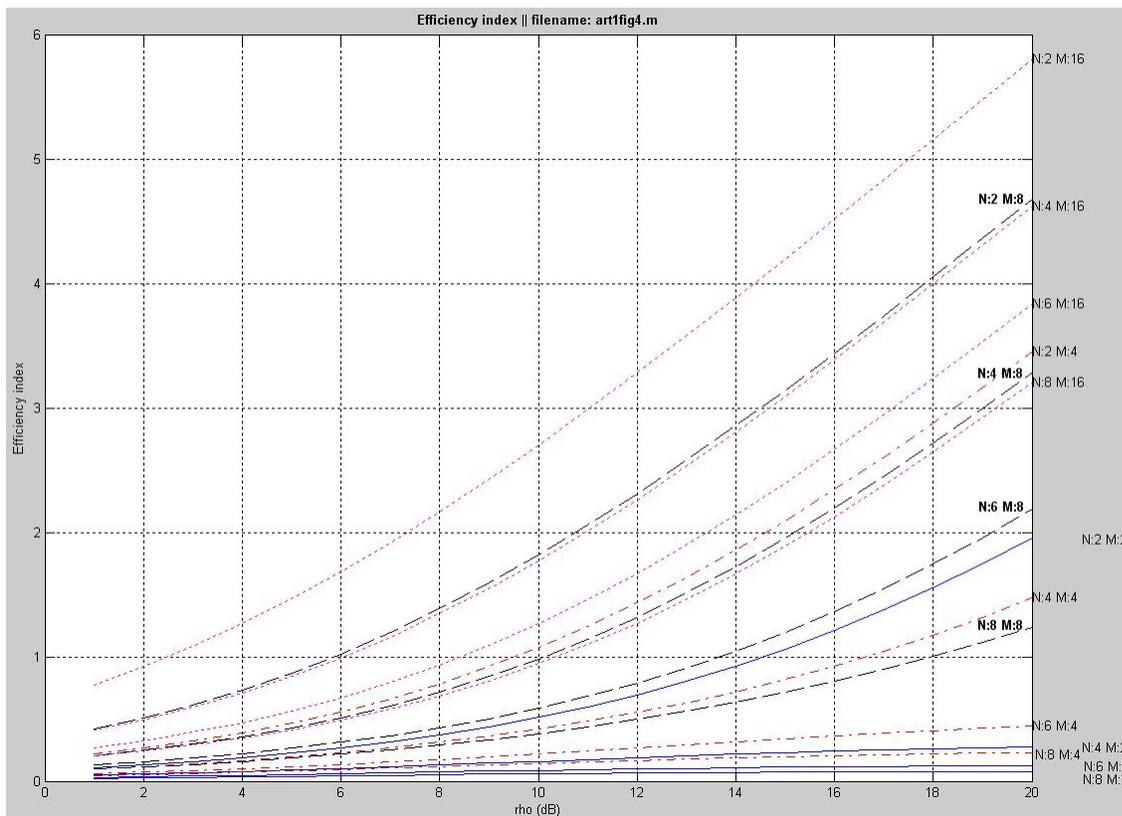


FIG. 7.5 – Indice d'efficacité par mobile en fonction de  $\rho$  pour des  $P_i = 1/N$

Pour  $N = 1$ , le traitement linéaire optimal correspond à la combinaison à ratio maximal, mais à des valeurs supérieures, les valeurs de probabilité de l'indice d'efficacité sont plus difficilement déterminées. L'implémentation d'un tel système ne requière que la minimisation de l'erreur quadratique moyenne.

C'est également la raison pour laquelle on a considéré une technique plus pratique consistant en l'ajustement de la puissance transmise de façon à ce que le signal reçu pour chaque signal soit constant. Pour un tel système, c'est l'équation 7.15 qui est considéré. Étant donné que c'est pour une puissance d'émission unitaire que les résultats sont légèrement meilleurs, seulement ce cas sera analysé.

$$P_i = \frac{\min_j [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]_{jj}}{[\mathbf{C}^H \mathbf{C}]_{ii}} \quad i = 1, N \quad (7.15)$$

### 7.2.1 Analyse de performances

Avant de passer à l'analyse de performances proprement dite, il faut préciser un point. La figure 7.5 n'a pas des valeurs de  $P_i = 1$  tel que dans la figure précédente qui constitue un cas idéal. En effet, la figure 7.5 à des valeurs de  $P_i = 1/N$ . Cela a pour effet d'influencer la sortir de sorte que les meilleurs cas de  $M = i$  arrivent à surpasser les pires cas de  $M = j$ , pour  $i < j$ . Notez également que nous avons effectués les simulations dans les mêmes conditions que l'on a compris de ce que l'auteur de l'article a fait. On a donc, entre autre, utilisé  $10^4$  canaux aléatoires. Autre particularité, pour les valeurs de  $N$ , on a 2, 4, 6, 8, l'auteur original ayant plutôt utilisé 1, 2, 4, 8.

Maintenant, pour l'analyse des performances de la simulation en figure 7.4, nous remarquons que les résultats sont moins bons lorsque  $N > M/2$ , puisque plus  $N$  progresse, plus il y a interférence et corrélation. On note également, pour tous les cas, que plus  $\rho$  augmente, plus l'indice d'efficacité est meilleur. C'est également le cas à mesure que  $M$  augmente et lorsque  $N$  diminue.

## 7.3 Traitement non linéaire optimal

Cette section n'utilise pas la même modulation que pour le reste de l'article. Aussi, il n'utilise pas les mêmes hypothèses initiales que pour le cas linéaire et ne peut donc être réutilisé pour comparaison directe avec les autre sections de l'article.

De plus, M. Winters conclut cette courte section en disant que l'on ne peut pas utiliser de traitement non linéaire optimal pour les transmissions des station de base vers les mobiles, et alors, que sans codage, l'indice d'efficacité est borné par le cas linéaire.

On entend par optimal dans cette section, que l'on souhaite minimiser la probabilité d'erreur dans la détection de  $A_n$ . C'est donc un détecteur à vraisemblance maximal qui doit être utilisé ici. Dans un tel détecteur, le taux d'erreur est évalué par l'équation 7.16. La distance minimale au carré utilisée dans cette équation est défini par l'équation 7.17.

$$P_e \approx e^{-d_{\min}^2 \rho / 4} \quad (7.16)$$

$$d_{\min}^2 = \min_{A_n, \widehat{A}_n; A_n \neq \widehat{A}_n} \left| \mathbf{CP} \left( \mathbf{A}_n - \widehat{\mathbf{A}}_n \right) \right|^2 \quad (7.17)$$

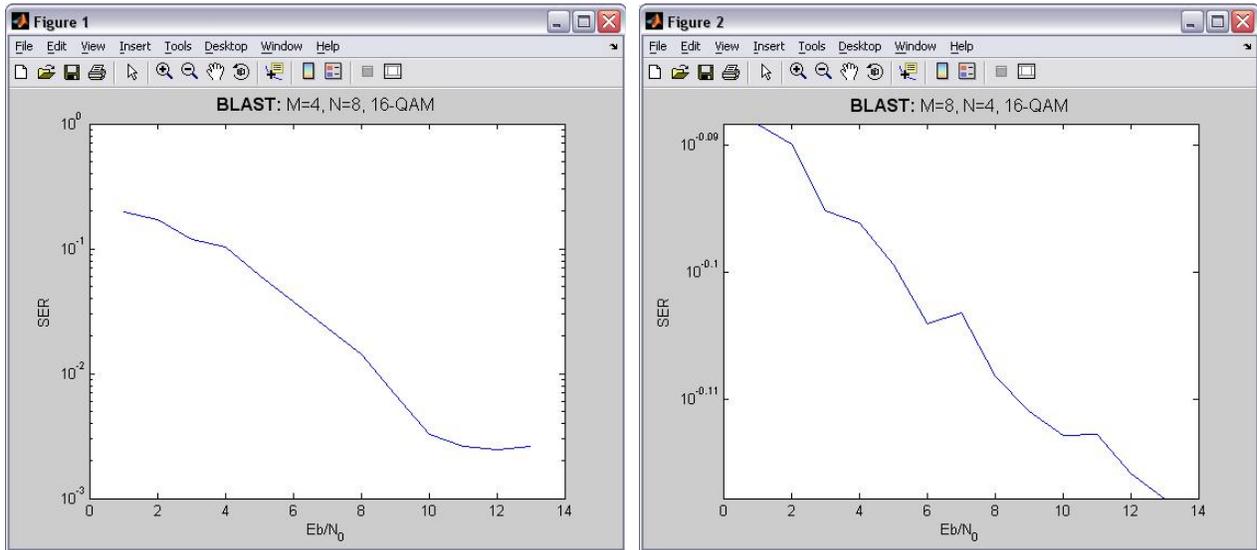


FIG. 7.6 – Deux cas d'utilisation du code VBLAST.m de [13] pour 16QAM

Avec les matrices  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{P}$ , et  $L$ , étant le niveau de la modulation QAM, on serait en mesure de calculer le taux d'erreur pour un SNR donné en validant chacune des données transmises. L'indice d'efficacité d'une telle méthode par mobile est alors de  $2 \log_2 L$ .

M. Winters ne tente pas le travail avec la modulation QAM étant donné la puissance de calculs requises et les délais occasionnés. Il faut comprendre qu'en 1987, l'accès à des ordinateurs puissants était plus difficile. Il poursuit cette section avec une modulation QPSK, BPSK, et ne présente qu'une table avec peu d'informations outre la conclusion suivante qu'il émet.

Avec un traitement non linéaire optimal, il est possible d'avoir jusqu'à  $M$  mobiles qui accèdent au système avec un accroissement de SNR requis minimal. Rappelons que dans le cas d'un traitement linéaire, lorsque  $M = N$ , l'accroissement est très intense. C'est pourquoi un traitement non linéaire serait considéré meilleur pour les cas avec  $N > M/2$ . Dans la figure 7.6, on peut voir ce calcul que M. Winters n'a pas fait. Le code disponible dans la publication [13] sous le nom de `blast.m`, permet un tel calcul. C'est ce qui a été fait pour deux cas de QAM de 16 points. Comme mentionné, ce n'est pas un code écrit de mon cru, et malgré qu'il soit utilisé correctement, il fournit le graphique tel que montré avec une courbe assez abrupte.

## 7.4 Capacité

On va maintenant considérer une limite supérieure sur la capacité. La capacité normalisée par la bande passante entre les mobiles et la base dans le cas où les signaux sont pondérés et combinés à la base avant la transmission. Pour un canal donné, la capacité du  $i$ -ième canal indépendant est donné par l'équation 7.18, où  $\lambda_i$  est la  $i$ -ième valeur propre de  $\mathbf{C}^H \mathbf{C}$ .

$$I_i = \log_2 (1 + \rho \lambda_i P_i) \quad i = 1, N \quad (7.18)$$

Étant donné l'indépendance des canaux,  $P_i = 1$  est la puissance qui maximise la capacité. On obtient donc pour un canal donné, la moyenne en équation 7.19. Cette équation est une borne maximale puisque sans

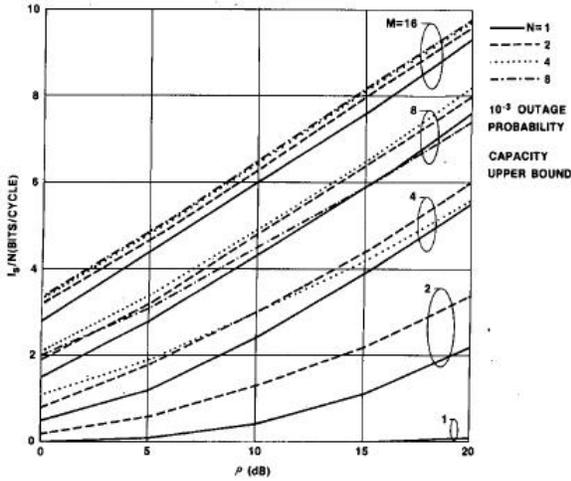


Fig. 5. Upper bound on the average normalized capacity per remote versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability with  $N$  remotes and a base station with  $M$  antennas.

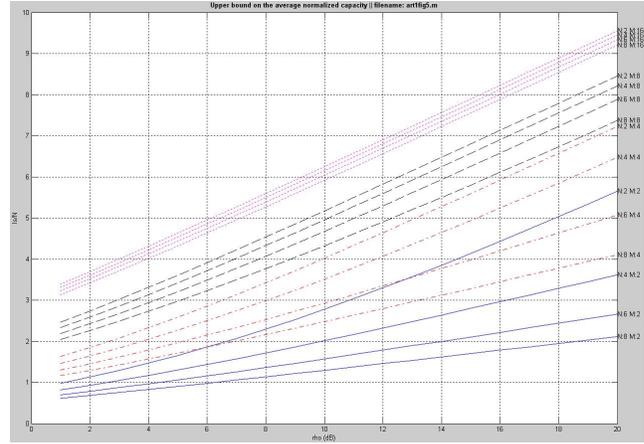


FIG. 7.7 – Limite supérieure pour la moyenne normalisée de la capacité

prétraitement et combinaison du signal a priori, elle est la valeur maximale que l'on peut atteindre. Avec un  $N = 1$  et  $\lambda_1 = \mathbf{C}^H \mathbf{C}$ , de l'équation 7.14, la distribution pour la capacité obtenu est donnée par l'équation 7.20.

$$I_s/N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2(1 + \rho \lambda_i) \quad (7.19)$$

$$P(I_1) = 1 - e^{-(2^{I_1} - 1)/\rho} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{2^{I_1} - 1}{\rho}\right)^k}{k!} \quad (7.20)$$

Ainsi, on a une capacité normalisée à  $\rho'$  qui est la même que sans codage  $\rho$  à un indice d'efficacité de  $10^{-4}$  de taux d'erreur, où  $\rho = \rho' |\ln(P_e/2)|/1.5$  (ou  $\rho = \rho' + 8.2dB$ ). On peut maintenant le voir graphiquement à la figure 7.7.

#### 7.4.1 Analyse de performances

En premier lieu, comparons un peu les différences entre ma simulation et celle de M. Winters. Il n'y en n'a pas!<sup>7</sup> Concernant les performances, nous avons que pour un  $N$  croissant, l'interférence croît également. C'est la différence avec le cas de la figure 7.4. On note aussi que pour<sup>8</sup>  $M \leq 4$ , lorsque l'on a des valeurs  $M = N$ , l'interférence se démarque. C'est donc une situation qu'il faudra éviter. Autrement, à mesure que  $M$  augmente, la capacité augmente.

<sup>7</sup>Excepté le fait qu'il n'a pas touché aux cas avec  $N > M$ .

<sup>8</sup>l'article dit l'inverse, c'est à dire pour  $M \geq 4$ .

# Chapitre 8

## Deux stations mobiles à $M$ antennes

Murphy's Constant : "Matter will be damaged in direct proportion to its value."

### 8.1 Description du système

Le système présentement en cause peut être représenté par le schéma montré à la figure 8.1. On peut également le représenter via une forme vectorielle tel qu'à la figure 7.2. Des différences sont relevées à quelques niveaux. En effet, on a entre autres plusieurs antennes pour une transmission. On peut donc combiner les signaux avant l'envoi. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir une matrice  $\mathbf{P}$  qui soit diagonale.

Autre différence, cette fois au niveau des spécifications énergétiques. La puissance de transmission est limitée à 1, mais calculée via l'équation 8.1. La puissance de la transmission se limite donc à  $1/N$  fois la puissance totale de transmission du système décrit au chapitre précédent. Une autre différence est l'intérêt que l'on doit porter sur le débit total suivant  $\mathbf{C}$ , le canal, et la distribution de ce débit plutôt que la distribution du débit par canal.

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{P}^H \mathbf{P}]_{ii} = 1 \quad (8.1)$$

### 8.2 Traitement linéaire optimal au récepteur

Dans le cas présent, nous simplifierons notre étude en ne s'attaquant qu'à un cas de traitement à la réception. Comme vu précédemment  $I_i$ , l'indice d'efficacité, suit la même équation. C'est à dire l'équation 7.9. On a donc pour ce cas, une valeur de  $I_s$  correspondant à la somme des  $I_i$ , tel que décrit en équation 8.2.

$$\mathbf{I}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_i \quad (8.2)$$

Dans la situation où l'on a un  $N = 1$ , on obtient alors un résultat identique au cas présenté au chapitre précédent. Quant aux cas ayant un  $N \geq 2$ , on doit passer par les  $P_i$  tel que réalisé précédemment au chapitre 7. L'idée est de maximiser le débit total par l'ajustement de la puissance de transmission de chaque antenne proportionnellement à la puissance du signal reçu. Ainsi, la puissance de la transmission s'obtient

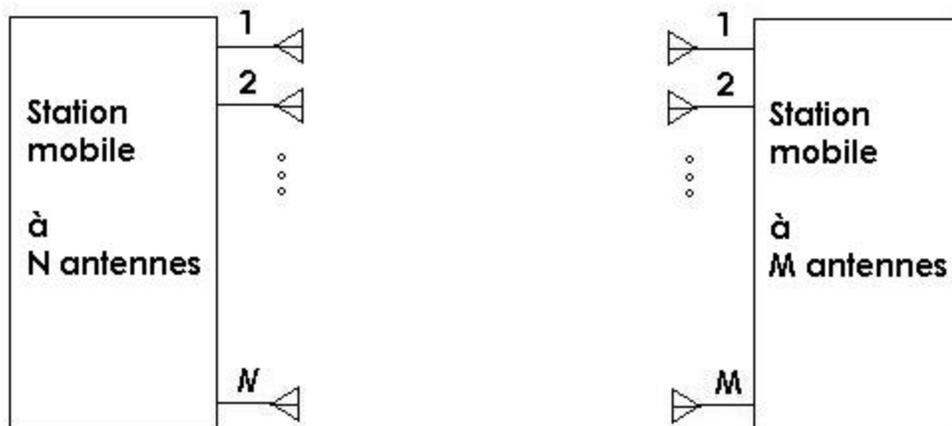


FIG. 8.1 – Schéma d'un système avec deux mobiles à plusieurs antennes

par l'équation 8.3.

$$P_i = \frac{[C^H C]_{ii}}{\sum_{j=1}^N [C^H C]_{jj}} \quad (8.3)$$

On trouve que les résultats sont nuls lorsque  $P_i = 1/N$  pour  $i = 1, N$ . C'est pourquoi on ne s'attardera que sur le cas à *équipuissance*<sup>1</sup> de transmission. Plusieurs effets sont à considérer lors de l'évaluation du débit maximal par canal  $I_s/N$  pour une probabilité de perte de signal donnée. À mesure que la valeur de  $N$  augmente,  $I_s/N$  est moyenné sur plus de canaux, ce qui décroît la valeur de  $\rho$  requise pour un  $I_s/N$  à une probabilité de perte de signal donnée. Également, lorsque  $N$  croît, l'interférence croît aussi, ce qui augmente le  $\rho$  requis pour un  $I_s/N$ . Tout dépendant de la valeur de  $M$  et  $N$ , un des effets pourrait dominer et se démarquer. La figure 8.2 nous montre, pour plusieurs cas, des valeurs de moyenne d'efficacité par canal.

### 8.2.1 Analyse de performances

Encore une fois, on obtient en simulation les mêmes résultats que la simulation de M. Winters. Quant à l'analyse des résultats, on remarque que plus  $N$  augmente, plus il y a de l'interférence. Par contre, plus  $M$  est élevé, moins l'effet de la variation de  $N$  est perceptible. Pour une valeur de  $M$  fixé, le  $\rho$  requis pour un  $I_s/N$  donné croît de façon linéaire avec  $N$  lorsque ce dernier se trouve à respecter  $N \leq M/2$ . Lorsque l'on a  $M = N$ , un cas particulier comme dans la simulation précédente, nous devons avoir un  $\rho$  bien plus élevé. Cela est dû à la probabilité plus grande de corrélation à mesure que  $N$  s'approche de  $M$ .

## 8.3 Traitement linéaire optimal aux deux bornes

Ayant analysé le cas avec traitements qu'au récepteur, on peut maintenant s'attaquer au présent cas où l'on a un traitement linéaire optimal, à la fois au récepteur et au transmetteur. Lorsque l'on qualifie le traitement d'optimal, on veut dire que l'erreur quadratique moyennée totale à la sortie du récepteur est minimisée.

<sup>1</sup>de puissance égale

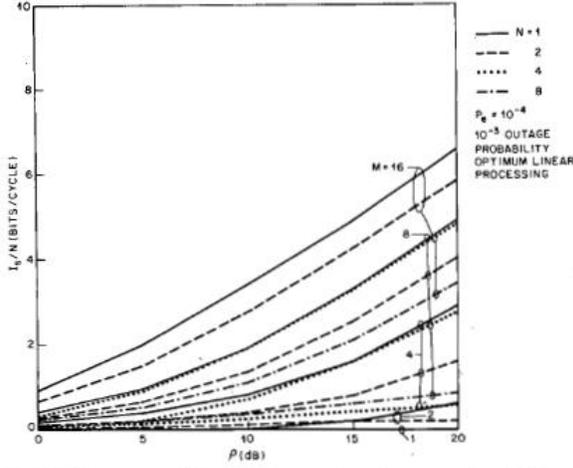


Fig. 7. The average efficiency index per channel versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate for optimum linear processing at one receiver;  $N$  transmitting antennas and  $M$  receiving antennas.

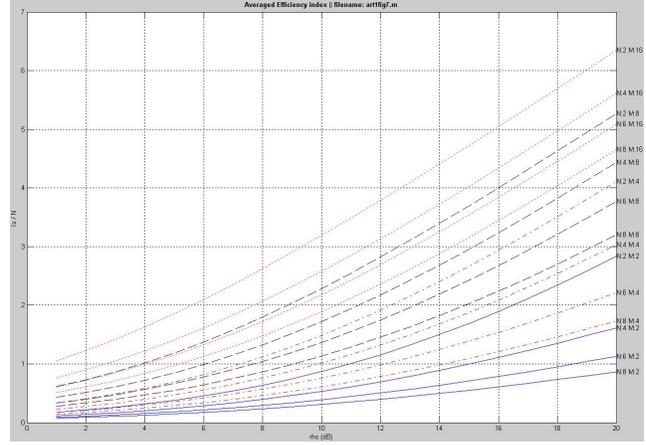


FIG. 8.2 – Valeurs de moyenne d'efficacité par canal pour divers cas

Pour un canal donné  $\mathbf{C}$ , ainsi que des valeurs de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{W}$  conjointement optimales, la valeur du total de l'erreur quadratique moyennée est donnée par l'équation 8.4, où l'on a les  $\lambda_i$  qui sont les valeurs propres de  $\mathbf{C}^H \mathbf{C}$  et la somme des  $P_i$  qui nous donne 1.

$$MSE = \sum_{i=1}^N MSE_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \rho \lambda_i P_i} \quad (8.4)$$

D'ici, on pourrait déterminer les  $P_i$  qui minimiseraient l'erreur quadratique moyennée totale, mais l'on souhaite en fait maximiser le débit total que l'on a en équation 8.5.

$$\mathbf{I}_s = \sum_{i=1}^N \log_2 \left( 1 + 1.5 \rho P_i \lambda_i / \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right) \quad (8.5)$$

L'analogie du remplissage d'eau peut nous servir dans la manipulation des  $P_i$  pour maximiser  $I_s$ . Cela est fait sur les  $m$  termes par les deux équations suivantes.

$$P_i = \begin{cases} J - [1.5 \rho \lambda_i / |\ln \frac{P_e}{2}|]^{-1} & \text{si } [1.5 \rho \lambda_i / |\ln \frac{P_e}{2}|]^{-1} < J \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (8.6)$$

$$J = \frac{1}{m} \left( 1 + \sum_i \left[ 1.5 \rho \lambda_i / \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right]^{-1} \right) \quad (8.7)$$

Enfin, la figure 8.3, nous montre la moyenne de l'indice d'efficacité par canal en fonction de  $\rho$ .

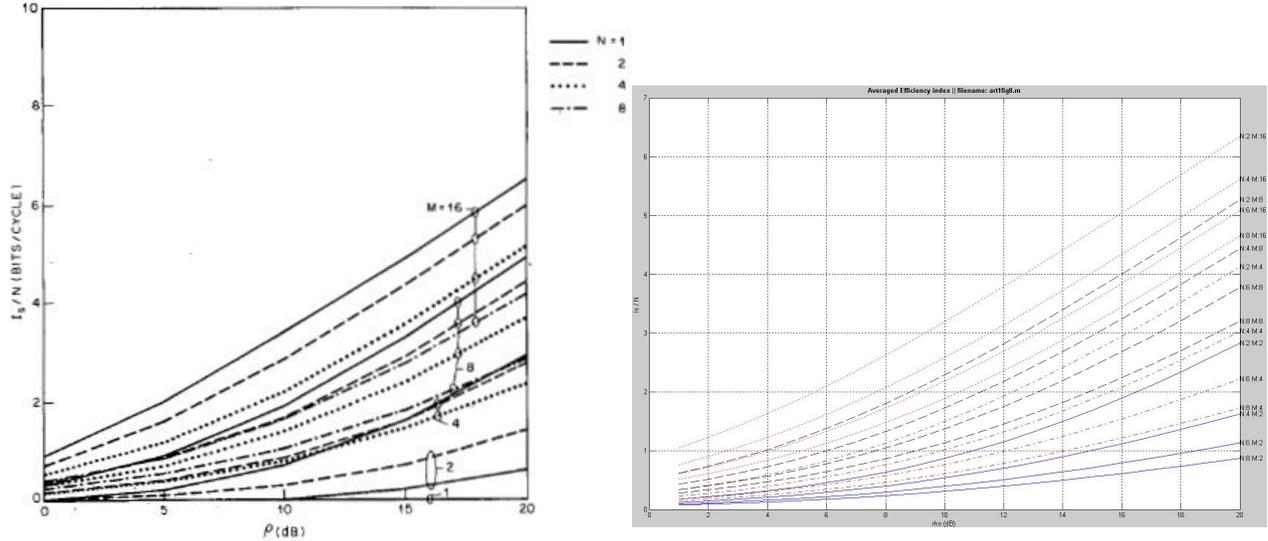


Fig. 8. The average efficiency index per channel versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate for the optimum transmitter/receiver matrix pair;  $N$  transmitting antennas and  $M$  receiving antennas.

FIG. 8.3 – Moyenne de l'indice d'efficacité par canal en fonction de  $\rho$

### 8.3.1 Analyse de performances

Avec un  $M$  fixé, le SNR requis pour un  $I_s/N$  donné, croît par moins de  $3\text{ dB}$  lorsque  $N$  est doublé. Ainsi, l'effet de la prise de la mesure de la moyenne, tel que vue dans la précédente section, pour  $N \leq M$  nous affecte ici aussi. Dû à cet effet, on remarque dans la simulation de M. Winters, que pour  $M = 2$ , avec un  $N$  passant de 1 à 2,  $I_s/N$  va croître. On remarque également que pour  $N < M/2$ , l'indice d'efficacité moyenné par canal est similaire au cas du traitement linéaire optimal à la réception seulement. Par contre, on note des valeurs d'indice moyennées bien plus élevées pour des  $N > M/2$ .

## 8.4 Capacité

Comme dans le chapitre précédent, on déterminera la capacité par l'analyse des canaux indépendants. Ce que l'on recherche correspond en fait à la limite de Shannon tel qu'on l'a présenté plus tôt. On a donc pour le total de la capacité normalisé, une représentation par l'équation 8.8, où, encore une fois, les  $\lambda_i$  représentent les valeurs propres de  $\mathbf{C}^H \mathbf{C}$  et la somme des  $P_i$  qui nous donne 1.

$$\mathbf{I}_s = \sum_{i=1}^N \log_2 (1 + \rho P_i \lambda_i) \quad (8.8)$$

Dû à cette équivalence, la figure 8.3 représente également la capacité normalisée moyennée par canal avec  $\rho' = 1.5\rho / |\ln(P_e/2)|$ .

# Discussion

Cet article a donc étudié, pour une probabilité de perte de signal donnée, le débit maximal et la capacité de systèmes à antennes multiples dans un environnement à évanouissement de Rayleigh. On a compris que lorsque nous avons  $M/2$  mobiles, ou moins, connectés à une base de  $M$  antennes, le système est aussi efficace que lorsqu'il n'y a qu'un seul mobile. Les choses se corsent lorsque l'on tente d'y connecter plus de  $M/2$  mobiles. Un système à optimisation non linéaire peut fonctionner jusqu'à  $M$  mobiles par contre.

Le système avec deux mobiles se comporte de la même façon dans la situation avec  $M/2$  antennes sur le second mobile. Par contre, lorsque nous avons un système de traitement linéaire optimal à la fois au récepteur et au transmetteur, le système se comporte à merveille jusqu'à  $M$ . La démonstration a donc été faite qu'il y a un potentiel pour une grande capacité lors de multiparcours dans un contexte de bande passante limitée.



## Quatrième partie

Gain de diversité avec la diversité de  
transmission



# Mise en contexte et hypothèses d'analyse

L'article en revue dans cette partie, malgré la date de la référence, avait en fait été originalement complété en fin du mois de mai 1994. Cela change beaucoup le contexte de la recherche et la publication puisque plusieurs développements se sont fait entre 1994 et 1998 qui ne lui était pas disponible. Le présent article étudie donc le cas où l'on utiliserait de la diversité à la transmission pour l'obtention de gain de diversité en réception.

La diversité de transmission implique que de multiples antennes transmettent avec des délais, plusieurs versions d'un signal. Cela a pour effet de créer un évanouissement sélectif en fréquence. Le signal reçu sera alors égalisé afin de fournir le gain de diversité.

Un estimateur de séquences à vraisemblance maximal idéal<sup>2</sup> et un nombre arbitraire d'antennes seront utilisés. Les résultats seront comparés à de la diversité de réception avec combinaison à ratio maximal. L'étude est également faite sous la contrainte d'une modulation BPSK<sup>3</sup> avec détection cohérente. On fait aussi l'hypothèse que les évanouissements suivent une fonction de Rayleigh et sont indépendants. Aussi, on présume que le délai entre les signaux transmis est tel que les signaux reçus soient non corrélés.

---

<sup>2</sup>C'est à dire qu'il a une longueur infini avec connaissance parfaite du canal.

<sup>3</sup>Binary phase shift keyed : l'équivalent de la modulation en quadrature d'amplitude mais avec seulement deux points, et donc, seulement deux choix possibles pour la prise de décision.



# Chapitre 9

## Description de la diversité de transmission

”Il y a des gens qui observent les règles de l’honneur, comme on observe les étoiles, de très loin.” Victor Hugo

### 9.1 Description

La figure 9.1 nous présente schématiquement la diversité de transmission avec  $M$  antennes de transmission et une antenne à la réception. Le signal  $s(t)$  émis avec des délais  $\tau$  sont envoyés avec une puissance de transmission totale de  $P_T$ . Cette puissance est équitablement distribuée parmi les  $M$  antennes, et donc, la puissance de transmission par antenne est de  $P_i = P_T/M$  avec  $i$  qui va de 1 à  $M$ .

#### 9.1.1 Délai

Afin de choisir un délai  $\tau$  qui permette la non corrélation, on tâchera de respecter l’équation 9.1. Dans le cadre présent, on assumera que les symboles transmis sont indépendants et que les transmetteurs et filtres ne causent pas d’interférences entre les symboles à la réception.

$$E[s(t)s(t+\tau)] = 0 \tag{9.1}$$

Considérant ces hypothèses, ainsi que le fait que l’on présume un évanouissement uniforme, un délai d’au moins une période de symbole  $T$ , où  $\tau \geq T$  est requis pour obtenir une non corrélation à la réception.

On choisira donc un délai de  $\tau = T$  car un délai inférieur causerait corrélation qui nuirait à la diversité, et un délai plus grand décroîtrait la complexité de l’égalisateur au receveur sans amélioration en gain par diversité.

#### 9.1.2 Conditions du système et modélisation

Au récepteur, on ajoute un bruit blanc gaussien au signal afin de modéliser le bruit. Le signal ainsi reçu est échantillonné au taux d’émission des symboles. Ces symboles sont déterminés par l’estimateur de séquence à vraisemblance maximal. Le système ainsi décrit peut être modélisé par la figure 9.2.

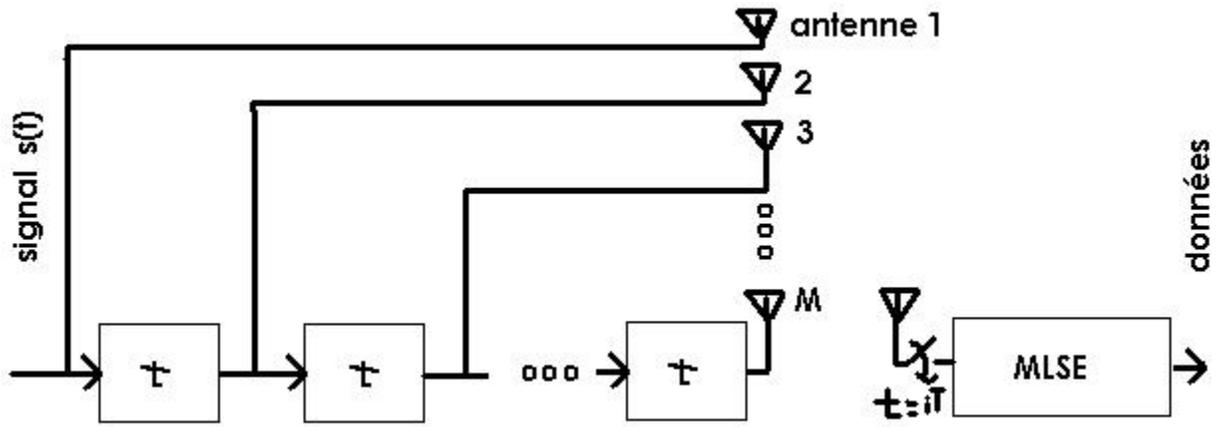


FIG. 9.1 – Modèle du système avec les délais à la transmission

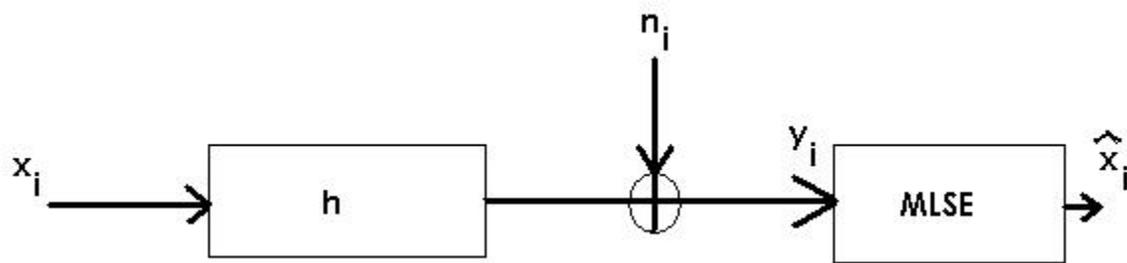


FIG. 9.2 – Modélisation simplifiée du système du modèle en figure 9.1

Les entrées, modulées en BPSK, sont constituées par une séquence aléatoire d'entrées binaires indépendantes  $x = \{x_i\}$  avec des valeurs équiprobables de  $\pm 1$ . Le transmetteur et le canal à réponse impulsionnel sont donnés par l'équation 9.2.

$$h = \dots 00h_0h_1 \dots h_{M-1}00 \dots \quad (9.2)$$

Dans un contexte d'évanouissement de Rayleigh, les constituant de  $h$  sont des variables aléatoires indépendantes complexes gaussiennes de moyenne nulle et de variance  $P_T/M$ . Cette variance correspond bien sûr à la puissance d'une branche. On peut également modéliser le bruit  $n = \{n_i\}$  par une séquence de variables aléatoires indépendantes complexes gaussiennes de moyenne nulle et de variance  $N_0$ . Enfin, on modélise également l'entrée de l'estimateur de séquence à vraisemblance maximal par  $y = \{y_i\}$  ce qui nous donne l'équation  $y = x * h + n$  tel qu'on l'a vue dans la sous section 2.1.6 sur la modélisation de canaux avec bruit et évanouissement.

Avec l'estimateur considéré, le taux de bit d'erreur pour un canal s'approxime par la probabilité de la distance maximal entre les événements d'erreur. Cette approximation est acceptée pour de petits niveaux de taux de bit d'erreur, d'où l'on obtient l'équation 9.3, où la distance minimale est donnée par l'équation 9.4.

$$BER \cong (1/2) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{d_{\min}^2}{N_0}} \right) \quad (9.3)$$

$$d_{\min}^2 = \min_{\varepsilon} \|h * \varepsilon\|^2 \quad (9.4)$$

Si l'on se souvient bien de la sous-sous-section 4.1.1.5, cette équation trouve correspondance dans l'équation de la distance euclidienne décrite en équation 4.9. Le symbole  $\|\cdot\|^2$  symbolise la norme  $l_2$  qui est en fait une somme des carrés des éléments. On a pour  $\varepsilon$ , l'équation 9.5 qui le décrit. Dans l'équation 9.5,  $l$  représente la longueur d'un événement d'erreur, où  $\varepsilon_n$  est le  $k$ -ième symbole d'erreur.

$$\varepsilon = \dots 00\varepsilon_0 \dots \varepsilon_l 00 \dots \quad (9.5)$$

On en obtient donc une borne pour le filtre adaptif<sup>1</sup> qui est en fait le carré de la distance d'un événement d'un bit d'erreur. Ainsi, de l'équation 9.4, cette distance est donnée par l'équation 9.6.

$$d_{\min}^2|_{MFB} = \sum_{i=0}^{M-1} |h_i|^2 \quad (9.6)$$

Noter que c'est également la puissance du signal de sortie avec combinaison à ratio maximal. Donc, excepté la réduction du gain par  $M$ , la performance de la limite du filtre adaptif est la même que la diversité de réception. Cet écart de gain de  $M$  est aussi dû au fait qu'en diversité de réception, on devient en présence de  $M$  sources indépendantes de bruits.

### 9.1.3 Dégradation et probabilités

Avec l'information des paragraphes précédents, ainsi qu'avec l'équation de modélisation d'un estimateur à vraisemblance maximal, tel que décrit en équation 4.25, il nous est possible de procéder au calcul d'un indice de dégradation de performances d'un canal pour l'estimateur à vraisemblance maximal par rapport à la

<sup>1</sup>Également considéré comme un égalisateur dans les conditions présentes. Le glossaire le définit plus précisément.

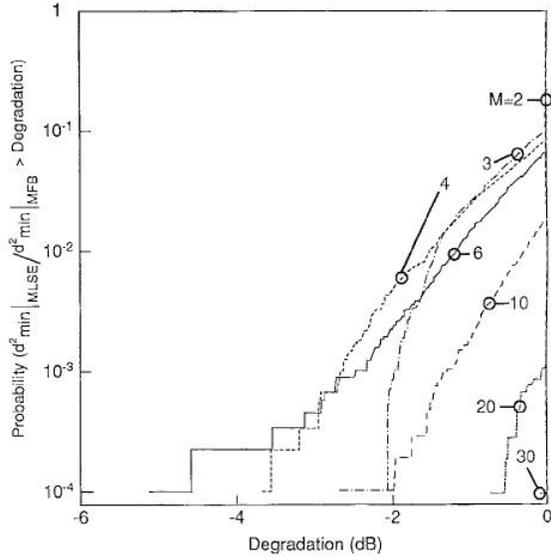


Fig. 3. Probability distribution of the degradation of the diversity gain with MLSE versus the matched filter bound.

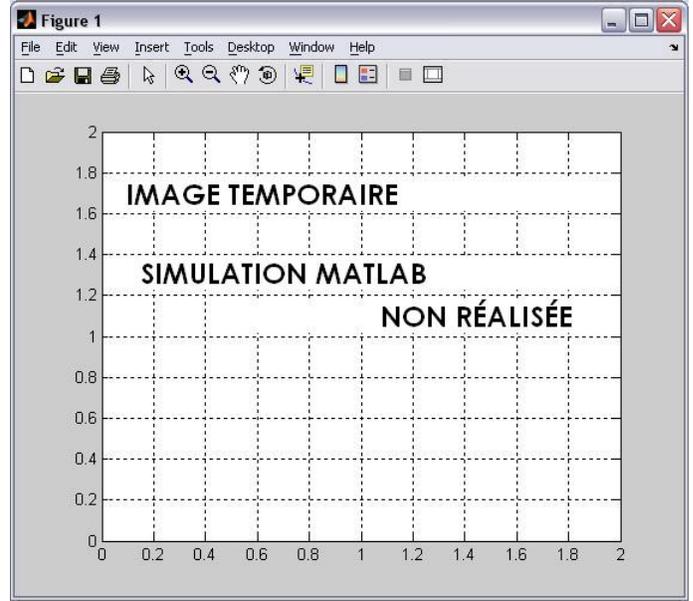


FIG. 9.3 – Distribution de la probabilité de l'indice de dégradation

limite du filtre adaptif. Cet indice de dégradation nous est donné par l'équation 9.7. Noter que pour des petites valeurs de ce ratio, la dégradation est plus élevée et alors  $10 \log \{degradation\}$  est plus négatif.

$$degradation = \frac{d_{\min|MSLE}^2}{d_{\min|MFB}^2} \quad (9.7)$$

Étant donné la nature aléatoire du canal, la distance minimale au carré et la dégradation deviennent également aléatoire. On remarque que dans le cadre du canal de Rayleigh uniforme, la distribution de la probabilité de  $d_{\min|MFB}^2$  normalisée sur sa moyenne est donnée par l'équation 9.8 où l'on a une valeur de  $x$  donnée par l'équation 9.9.

$$P(x) = 1 - e^{-x/M} \sum_{k=1}^M \frac{(x/M)^{k-1}}{(k-1)!} \quad (9.8)$$

$$x = \frac{d_{\min|MFB}^2}{E[d_{\min|MFB}^2]} \quad (9.9)$$

## 9.2 Résultats et analyse de performances

La figure 9.3 nous présente la distribution de probabilité du minimum de la distance euclidienne au carré comparée à celle de la borne du filtre adapté<sup>2</sup>. Les résultats démontrent que pour des valeurs de  $M$  de 1, 2, 3, 4, 6, 10, 20, 30, la probabilité du MLSE de ne pas atteindre les résultats du MFB est de moins de 9%

<sup>2</sup>aussi désigné plutôt par égalisateur, ou par l'acronyme anglophone MFB.

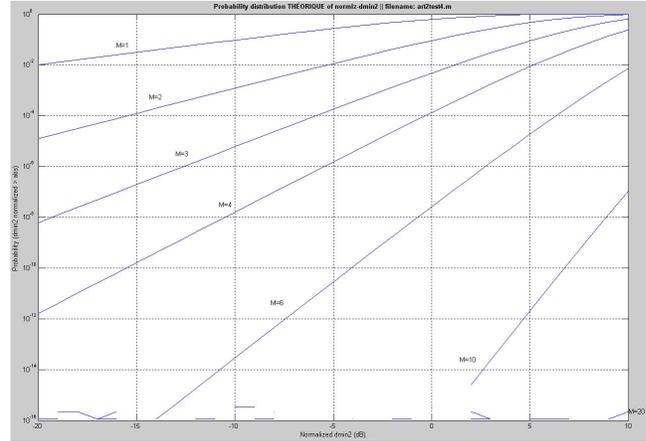
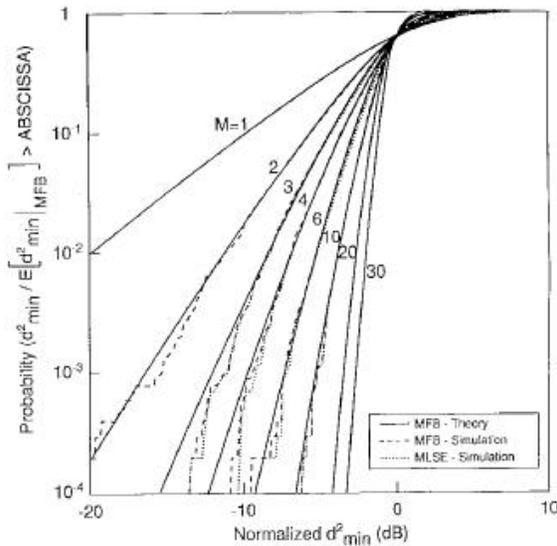


Fig. 4. Probability distribution of the normalized  $d_{\min}^2$  with the diversity gain of transmit diversity and MLSE compared to that of receive diversity.

FIG. 9.4 – Distribution de la probabilité théorique de la distance minimale au carré

pour  $M = 3$ . Cette probabilité décroît à mesure que  $M$  augmente. En effet, on remarque que pour  $M = 30$ , le MLSE atteint les résultats du MFB<sup>3</sup> pour 9999 cas sur 10000 selon la simulation de M. Winters.

Dû à la faible probabilité de dégradation, l’effet de la dégradation sur la moyenne du taux de bit d’erreur est négligeable. Ainsi, pour des environnements à évanouissement rapide, la diversité de transmission atteint le gain de diversité de la diversité de réception. Par contre, pour les cas d’évanouissement lent, ou d’environnement stationnaire, l’effet de la dégradation sur le taux de bit d’erreur doit être considéré.

Lorsque les canaux à grande dégradation ont de grande valeur de  $d_{\min}^2 |_{MFB}$ , alors la dégradation peut affecter significativement la distribution de probabilité du BER<sup>4</sup>. Par contre, si la dégradation est grande seulement pour les canaux où  $d_{\min}^2 |_{MFB}$  est élevé, alors la distribution de probabilité du BER avec MLSE ne sera pas très différente de celle du BER pour le MFB.

La figure 9.4 nous montre la distribution de probabilité de  $d_{\min}^2 |_{MFB}$  et de  $d_{\min}^2 |_{MSLE}$  par simulation, ainsi qu’à partir du résultat théorique présenté par l’équation 9.8. C’est d’ailleurs cette équation théorique que l’on a tenté de reproduire dans la figure 9.4 de droite. Malheureusement, on n’est pas arrivé au résultat présenté par M. Winters. L’équation 9.8 a donc été examinée de long en large jusqu’à ce que le professeur du cours de *Communications Numériques Avancées*, M. Sébastien Roy, ait compris la source de l’erreur et trouvé la solution. L’erreur serait dû au fait que l’auteur ait mal considéré l’influence de  $M$  dans l’équation et qu’il l’ait mis en dénominateur au lieu de la position en numérateur. On a donc refait la simulation avec les corrections suggérées pour arriver à la figure 9.5. Cette dernière représente la distribution de la probabilité théorique de la distance minimale au carré tel que présenté par l’équation 9.8 mais avec correction de l’erreur.

<sup>3</sup>M.F.B. : Matched Filter Bound, Borne de filtre adaptif.

<sup>4</sup>Taux de bit d’erreur.

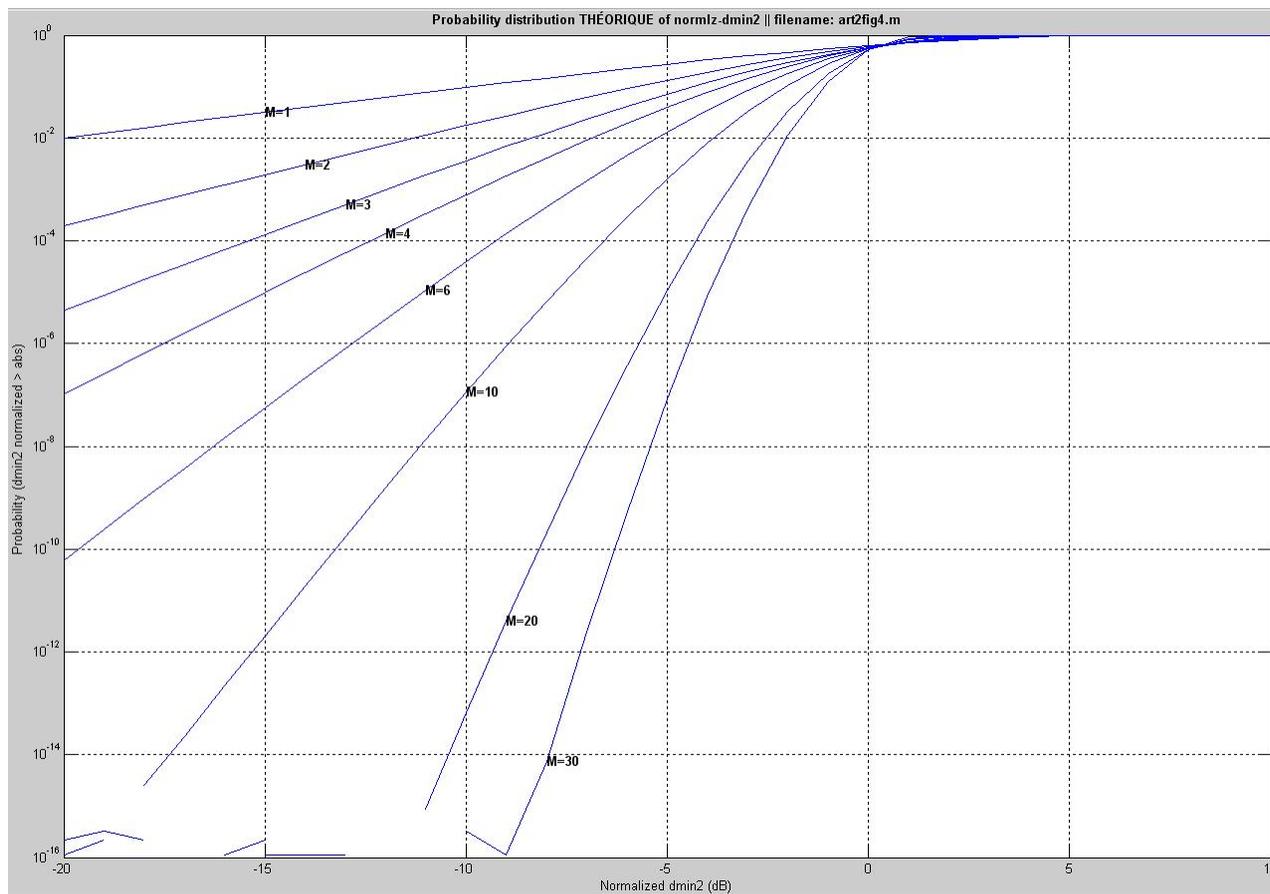


FIG. 9.5 – Distribution de la probabilité théorique de la distance minimale au carré **corrigée**

Pour ce qui est des résultats de M. Winters, ils démontrent que les résultats théoriques sont très près des résultats de simulation. Pour des valeurs de  $M \geq 3$ , les résultats pour le *MSLE* sont très près de ceux du *MFB*. En fait, ils ne sont affectés que d'un peu moins de  $0.1dB$  de différence.

# Chapitre 10

## Problématique

”The man who can smile when things go wrong has thought of someone he can blame it on.”  
Jones’s Law

Nous débuterons en premier lieu par une comparaison avec d’autres techniques de diversité pour ensuite jeter un coup d’œil du côté des avantages et des désavantages de la diversité de transmission.

### 10.1 Comparaison avec d’autres techniques de diversité

#### 10.1.1 Diversité par alternance

La diversité par alternance fonctionne avec rétroaction de la part du récepteur qui signale au transmetteur que la puissance du signal reçu est tombée sous un seuil en deçà duquel le transmetteur alternera l’antenne qui se fera un plaisir de transmettre la suite de la transmission informationnelle.

##### 10.1.1.1 Avantages

Cette technique présente l’avantage, par rapport à la technique de diversité de transmission décrite par l’article, d’être bien plus simple de réalisation.

##### 10.1.1.2 Désavantages

Quant aux désavantages, le principal est le fait que le gain de diversité atteint n’est que l’équivalent de diversité de sélection plutôt que la diversité par combinaison optimale ou à ratio maximal. Aussi, ce gain décroît encore plus avec le traitement et le délai de propagation et devient pire avec des évanouissements rapides.

#### 10.1.2 Diversité avec retransmission adaptatif

Ici, la base avec antennes multiples transmet avec le même schéma d’antennes que pour la réception.

##### 10.1.2.1 Avantages

L’avantage principal est que cette technique est simple d’implémentation et qu’un gain d’antenne est atteint.

### 10.1.2.2 Désavantages

On note par contre que pour un fonctionnement approprié, les fréquences de transmission ou de réception doivent être à l'intérieur de la bande passante cohérente<sup>1</sup>, ou la retransmission par division temporelle doit être utilisée.

### 10.1.3 Diversité par retransmission avec division temporelle

Des espaces de temps différents sont alloués dans le même canal pour la réception et la transmission.

#### 10.1.3.1 Avantages

Cette technique double le débit informationnel du canal.

#### 10.1.3.2 Désavantages

Il faut que l'espace de temps alloué soit assez court pour que l'évanouissement ne change pas significativement durant le temps alloué. Ce qui n'est évidemment pas toujours possible.

## 10.2 Avantages et désavantages de la diversité de transmission

On entend par diversité de transmission, la technique de diversité décrite par la présente partie du présent document, également par l'article [2]<sup>2</sup>.

### 10.2.1 Avantages

La technique en cause ici a l'avantage qu'elle permet d'obtenir un gain de diversité à de multiples mobiles avec un seul signal transmis. Les autres techniques peuvent seulement être utilisées pour un gain de diversité à un seul mobile.

La diversité de transmission est également avantageuse dans le sens où elle est utile dans les systèmes avec de multiples antennes à la fois au transmetteur et au récepteur. Dans ce cas, le nombre total de canaux à évanouissement indépendants peut être de  $M_{Tx} \times M_{Rx}$ . Où le premier terme désigne le nombre d'antennes au transmetteur, et le second terme, le nombre d'antennes au récepteur. Dans ce cas, la diversité de transmission peut être utilisée avec la diversité de réception afin d'atteindre de hauts niveaux de gain de diversité avec seulement quelques antennes au transmetteur et au récepteur.

*Ce résultat énoncé ici est capital dans le monde des systèmes MIMO. Cet énoncé qu'émet l'auteur de l'article fonde en fait une grande espérance envers la diversité de transmission, qui est justifié. En effet, ce résultat, qui n'est pas prouvé ici, mais postulé, stipule tout de même que l'on est en mesure d'atteindre des niveaux très élevés de gain de transmission par l'utilisation d'un système à multiples antennes aux deux bornes d'un lien de communication. M. Foschini prouvera cet énoncé plus en détails dans ses publications de 1996 et 1998, sur les capacités et limites de communications avec le MIMO.<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>ce qui n'est pas toujours le cas dans la majorité des systèmes sans-fil.

<sup>2</sup>Article dont traite la présente partie.

<sup>3</sup>*Notez que l'année réelle de première publication de l'article de M. Winters à l'étude dans cette partie est 1994, et non 1998.*

On a seulement considérée cette diversité comme outil de combat contre l'évanouissement multiparcours, mais on peut également l'utiliser pour atténuer l'interférence. En effet, l'accroissement de diversité au delà de 2 ou 3 ne fournit que peu de résultats contre l'évanouissement, mais est très bon contre l'interférence entre les canaux.

### 10.2.2 Désavantages

La diversité de transmission via  $M$  antennes au transmetteur résulte en  $M$  sources d'interférences et alors le contexte d'interférence sera très différent du cas à une seule antenne de transmission. On a donc obtenu une comparaison satisfaisante dans un contexte d'environnement à bruits limités, mais le contexte où l'on a des interférences limitées n'aura pas les mêmes performances.

Aussi, nos simulations considèrent un MLSE idéal avec estimation de canal parfait. En pratique, avec un nombre croissant d'antennes, la dégradation dû à l'estimateur sera plus élevée que le gain de diversité. Notez également que cette erreur de l'estimateur peut être plus grande plus le nombre d'antennes de transmission augmente dû à la puissance de transmission qui est divisée parmi les antennes. De plus, si le canal est dispersif, la diversité de gain pour un même nombre d'antenne augmentera, malgré que la complexité requise pour l'estimateur serait plus élevée.

Enfin, dans les systèmes où les stations de base sont plus élevés, la séparation d'antennes pour obtenir non corrélation de canaux aux mobiles est plus grande avec diversité de transmission à la base que la diversité en réception.



# Discussion

Cet article a étudié la diversité de gain avec la diversité de transmission et un estimateur de séquences à vraisemblance maximale idéale et un nombre arbitraire d'antennes et une modulation BPSK avec détection cohérente. Le tout s'est déroulé dans un contexte de canaux indépendants identiquement distribués avec distribution de Rayleigh pour l'évanouissement. Le délai entre signaux étant calibré pour ne pas avoir de corrélation. Les résultats démontrent que la diversité de transmission atteint de très près la diversité de gain en réception. Ainsi, on conclura qu'il est possible d'obtenir une diversité équivalente par traitement au transmetteur, au lieu du récepteur.

Cela se trouve à être très avantageux dans le contexte des innombrables restrictions des mobiles dans le monde des communications sans-fil. Par restrictions, on entend par exemple, les dimensions, le coût, l'énergie, et bien d'autres spécifications.



## Cinquième partie

### Discussion et conclusion



# Chapitre 11

## Discussion et conclusion

Murphy's Paradox : "Doing it the hard way is always easier."

### 11.1 Au sujet des résultats

La reproduction des résultats du premier article,[1], s'est fait avec succès<sup>1</sup>. Seule la partie sur le traitement non linéaire optimal n'a pas été reproduite tel que l'auteur l'a fait. Dans ce cas là, on a plutôt opté pour la réalisation d'une simulation avec modulation QAM que M. Winters a préféré ne pas réaliser. On l'a par contre réalisé avec un code Matlab VBLAST.m fourni en annexe du document [13].

Concernant les résultats des simulations du second article, [2], ça s'est avéré plus difficile. Le manque d'informations claires a empêché la compréhension claire et précise des concepts présentés. Ajouté au manque de temps et d'informations, la figure 3 n'a pu être réalisée. Quant à la figure 4, une tentative infructueuse du cas théorique selon l'équation 9.8, tel que recommandé par l'article, a mené à la figure 9.4 qui ne reproduit pas les résultats. Avec l'assistance du professeur, on a pu déterminer comment corriger l'erreur et obtenir la bonne figure en figure 9.5.

### 11.2 Au sujet des articles

J'ai noté un fait particulier par rapport à la publication [2]. En effet, durant mes diverses lectures, je suis par hasard, tombé sur le même article dans une autre publication : Proc. 1994 ICC/SUPERCOMM New Orleans, L.A., May 1994, vol 2. pp1121-1125. Ce qui change complètement le contexte du moment de la publication puisque cela porterait la publication de cet article avant ceux de Foschini sur 'On limits of Wireless Communications in a Fading Environment when using Multiple Antenna' ainsi que 'Layered Space-Time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment When Using Multi-Element Antennas' par exemple.

Aussi, l'équation 9.8 du même article comporte une erreur importante. En effet, au lieu de diviser par le nombre d'antenne, il aurait dû multiplier!

---

<sup>1</sup>une fois que les fautes de frappes dans les équations ont été décelées.

Concernant l'article [1], les petites fautes de frappes et 'oublies de frappes' dans les équations ont causés des désagréments importants. En effet, lorsque l'on ne maîtrise pas les concepts avancés de communications, il est très difficile de trouver ces erreurs. Cela résulte en des simulations erronées pour des raisons inexplicées, jusqu'à ce que la faute de frappe soit trouvée! J'en conclus donc qu'il faut toujours faire attention en lisant les publications scientifiques, car malgré plusieurs relectures (*très rapides*) de l'auteur, il demeure possible que des erreurs subsistent.

### 11.3 Conclusion

Les deux articles à l'étude constituent des développements très importants dans le monde du MIMO. Par contre, ils n'en couvrent qu'une mince partie. L'article [12] présente également des notions très importantes, de manière très claire. Il en est de même pour certains articles de M. Foschini<sup>2</sup>, Telatar<sup>3</sup>, et quelques autres.

"On the capacity of radio communication systems with diversity in a Rayleigh fading environment" nous apprend qu'avec  $M$  antennes de transmission et  $N$  antennes de réception, on peut générer  $M$  canaux indépendants de même bande passante. Les résultats nous démontrent plus spécifiquement que pour un traitement linéaire optimal à la réception, jusqu'à  $M/2$  canaux peuvent être établis avec les mêmes performances que pour un seul canal. Par contre, avec un traitement non linéaire optimal au récepteur, ou un traitement linéaire optimal à la fois au récepteur et au transmetteur, il est possible de d'atteindre jusqu'à  $M$  canaux sans compromis quant à la qualité.

"The diversity gain of transmit diversity in wireless systems with Rayleigh fading" nous apprend quant à lui qu'en envoyant plusieurs versions du même signal à différentes périodes dans le temps<sup>4</sup>, que l'on peut créer un évanouissement sélectif en fréquence à la réception n'ayant qu'une seule antenne. Cette dernière peut, avec une égalisation, obtenir un gain de diversité combattant ainsi l'évanouissement du canal. On démontre plus spécifiquement que pour  $M$  antennes de transmission, que le gain se maintient autour de  $0.1dB$  du gain de diversité accessible par l'usage de  $M$  antennes en réception, quel que soit le nombre d'antennes de transmission. On a ainsi une méthode permettant d'atteindre un gain de diversité à la réception, par l'usage d'antenne multiple à la transmission seulement.

Plus important encore, l'auteur de l'article postule en fin d'article, sans en faire la démonstration ou de développement, qu'il serait possible d'utiliser la technique à la fois au transmetteur et au récepteur afin d'atteindre  $M_{Tx} \times M_{Rx}$  pour niveau de gain, où le premier terme correspond au nombre d'antenne en transmission et le second au nombre d'antenne en réception.

---

<sup>2</sup>On limits of Wireless Communications in a Fading Environment when using Multiple Antenna; Layered Space-Time Architecture for a Wireless Communication in a Fading Environment using Multiple Antenna.

<sup>3</sup>Capacity of multi-antenna Gaussian channels

<sup>4</sup>avec des délais  $\tau$ .

Biographie, glossaire, bibliographie, index et  
pièces jointes



# Biographie

First Law of Final Exams : "Pocket calculator batteries that have lasted all semester will fail during the math final." Corollary : "If you bring extra batteries, they will be defective."

Dans la tradition des publications scientifiques, l'auteur a voulu rajouter une petite biographie afin d'agrémenter quelques peu le tout. Tout fraîchement admis à la maîtrise en génie électrique à l'Université Laval, plus spécifiquement dans le domaine de la fusion de données, l'auteur a complété un baccalauréat en génie informatique, ainsi qu'un certificat en administration de la même université dans l'année précédant son admission au cycle supérieur. Ses intérêts académiques sont diversifiés, allant de la fusion de données aux communications en passant par les mathématiques. L'auteur s'est mérité la médaille d'honneur imaginaire pour avoir réussi avec une note exceptionnel le cours d'Électromagnétisme appliqué.

Comique quand il en a envie, l'auteur est reconnu internationalement pour le développement de sa théorie unifiée sur la résolution de problèmes. En effet, travaillant sur plusieurs plans de ce côté, il aurait entre autre mis au point la technique de la *preuve par magie*. Les rumeurs courent que cela lui aurait valu un point boni pour imagination exceptionnelle et pour utilisation courageuse de cet outil innovateur dans un examen.

L'auteur est également connu pour sa ténacité sans pareil pour avoir donné son 300% en continu tout au long de la session, et même durant les fêtes dans le cadre d'un projet en communications. Cette capacité de travail serait due à son expérience passée entre 2003 et 2005 à avoir été étudiant à temps plein, en même temps qu'employé à temps plein, ainsi qu'officier de diverses associations étudiantes en même temps. Notez qu'il occupait même quelques fois plusieurs postes d'officier en même temps.

Ses intérêts *non académiques* sont diverses, allant de ses études, au piano, en passant par le cinéma et Sim City 4. Hélas, le temps libre est une denrée rare, pour le moment...



FIG. 11.1 – À Vancouver en janvier 2005

## Biographie pour la réédition de 2007

Depuis la première édition de ce travail il y eut beaucoup de développements, tel que l'écriture d'un chapitre pour un livre en fusion d'informations [15], ainsi que le développement de plusieurs innovations inattendues dans le cadre de la maîtrise. Cette dernière devrait se compléter prochainement, tout juste avant le début d'un doctorat dont le sujet et le domaine restent à déterminer au moment d'écrire ces lignes.



# Glossaire

"But what... is it good for?", - Engineer at the Advanced Computing Systems Division of IBM, 1968, commenting on the microchip.

1. Récepteur (Rx) : système de réception d'informations lors d'une communication.
2. Transmetteur (Tx) : système de transmission d'informations lors d'une communication.
3. Lien (de communication) : désigne le moyen par lequel l'information est acheminé, presque synonyme à canal tel que défini au chapitre 2.
4. Station de base : désigne la station fixe terrestre dans le contexte de communications sans-fil. C'est également cette station qui est relié, généralement, à un système de communications haut-débit filaire.
5. Station mobile : désigne généralement le téléphone cellulaire dans les communications sans-fil.
6. MIMO : Abréviation de Multiple-Input, Multiple-Output system qui désigne un système où s'y trouvent plusieurs entrées et sorties. Dans le contexte des communications sans-fil, cela désigne plus spécifiquement les systèmes où l'on retrouve plusieurs éléments d'antennes à la fois au transmetteur et au récepteur.
7. Diversité : tel que défini dans le chapitre 6, c'est une technique permettant de combattre les interférences et les atténuations pouvant survenir dans un canal de communications lors d'une transmission de signal.
8. Diversité (implicite) : diversité induite par le canal ou le contexte de la communication.
9. Diversité (explicite) : diversité induite volontairement par un arrangement des antennes, ou d'un encodage, ou d'un arrangement temporelle de l'envoi du signal de transmission lors d'une communication.
10. Combinaison : traitement fait aux multiples versions d'un signal lors d'une transmission avec diversité (implicite ou explicite).
11. Modulation : traitement fait à l'information que l'on veut transmettre afin de le faire correspondre, par segments, à des signaux spécifiques à l'information et au choix de la modulation.
12. Signal-to-Noise Ratio (SNR) : représente le ratio du signal sur le bruit, représenter ici par  $\rho$ .
13. Égalisateur (cas spécial du filtre adaptif) : est un filtre servant à uniformiser le plus possible la réponse du canal. C'est donc surtout utilisé lorsqu'il y a un évanouissement sélectif.



# Bibliographie

- [1] WINTERS J.H., "On the Capacity of Radio Communication Systems with Diversity in a Rayleigh Fading Environment", IEEE Journal on selected areas in communications, Vol. SAC-5, No. 5, June 1987.
- [2] WINTERS J.H., "The Diversity Gain of Transmit Diversity in Wireless Systems with Rayleigh Fading", IEEE Journal on vehicular technology, Vol. 47, No. 1, February 1998.
- [3] WOZENCRAFT J.M., "Principles of Communication Engineering", John Wiley & Sons inc., 1965.
- [4] GRADSHTEYN I.S., RYSHIK I.M., "Table of Integrals, Series, and Products", 5th Ed., Academic Press, 1994.
- [5] ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A., "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards, reprinted Dover Publications, 1965.
- [6] PAPOULIS A., PILLAI S.U., "Probability, Random Variables and Stochastic Processes, 4th Ed., McGraw Hill, 2002.
- [7] GIBSON J.D., "The Communications Handbook", 2nd Ed., CRC Press, 2002.
- [8] SHANNON C.E., "A Mathematical Theory of Communication", Reprinted Ed. with corrections from The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp.379-423, 623-656, July, October, 1948.
- [9] MacKAY D.J.C., "Information Theory, Inference, and Learning Algorithms", Cambridge University Press, 2003.
- [10] PROAKIS J.G., SALEHI M., "Communication systems engineering", Prentice Hall, 1994.
- [11] Wikipedia, The Free Encyclopedia, <http://www.wikipedia.org>, décembre 2005.
- [12] WINTERS J.H., "Optimum Combining in Digital Mobile Radio with Cochannel Interference", IEEE Journal on selected areas in communications, vol. sac-2, no. 4, July 1984.
- [13] CONSTANTINIDES A., SHACHAM A., "MIMO Wireless Systems", May 14, 2004. [*utilisation de leur code Matlab VBLAST.m modifié et adapté pour la figure 7.6 du présent document*]
- [14] About.com, <http://inventors.about.com>, janvier 2006.
- [15] SMARANDACHE, F., DEZERT, J. (EDITORS), "Advances and Applications of DSMT for Information Fusion (Collected Works)", vol. 2, USA : American Research Press, Rehoboth, 2006.

# Index

- Évanouissement de Rayleigh, 38
  - évanouissement lent, 37
  - évanouissement rapide, 37
  - évanouissement uniforme, 37
- Bayes, 49
- borne de Shannon, 50
- Bruit additif blanc gaussien, 20
- canal, 19
- capacité, 50
- Codage de Shannon, 50
- combinaison par gain égal, 57
- combinaison par ratio maximal, 57
- combinaison par sélection, 55
- diversité, 53
- diversité de transmission, 81
- diversité spatiale, 53
- diversité spatio-temporelle, 54
- diversité transformée, 55
- Entropie, 49
- Erreur quadratique moyenné, 45
- estimateur de vraisemblance maximal, 46
- gain en diversité, 27
- gain en multiplexage, 27
- gain matriciel (gain d'antenne), 26
- Gaussienne, 31
- indice d'efficacité, 61
- Ligne de vue, 23
- maximum a posteriori, 41
- Modélisation, 19
- Modulation, 39
- Modulation d'amplitude en quadrature, 42
- MSE, 45
- multiparcours, 26
- Nakagami-m, 36
- performance QAM/MQA, 44
- probabilité d'erreur, 45
- probabilité totale, 50
- QAM, 42
- récepteur optimal avec bruit gaussien, 42
- réduction interférences, 27
- Rayleigh, 34
- Rice, 35
- théorème de la limite centrale, 33
- théorie de l'information, 49
- types d'évanouissement, 36
- Types de canal, 21
- types de combinaison, 55
- types de diversité, 53
- vraisemblance maximale, 41

# Pièces jointes

Never put off 'til tomorrow what you can avoid altogether.

Dans les prochaines pages, on présente les programmes développés dans Matlab, les petites figures du présent document en grand format, et ensuite, une copie des deux articles de M. Winters à l'étude.

Notez par contre que pour les fonctions de distributions de probabilité et les fonctions de densités de probabilités du chapitre 3, c'est l'outil de démonstration de Matlab appelé par la commande *DISTTOOL* qui fut utilisé.

```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 1.11: Capacité du canal
%pour canal à évanouissement i.i.d.
clear
snrmin = 1; snrmax = 40; snrinc = 1;
abscise = [snrmin:snrinc:snrmax]; total = snrmax;

    for ind = 1:1:total
        Mt=1;
        capacity (ind) = Mt * log (1+(1/Mt) *ind)/ log(2);
    end

    for ind = 1:1:total
        Mt=3;
        capacity3 (ind) = Mt * log (1+(1/Mt) *ind)/ log(2);
    end

    for ind = 1:1:total
        Mt=9;
        capacity9 (ind) = Mt * log (1+(1/Mt) *ind)/ log(2);
    end

    for ind = 1:1:total
        Mt=18;
        capacity18 (ind) = Mt * log (1+(1/Mt) *ind)/ log(2);
    end

figure;
semilogy(abscise,capacity,'o-',abscise,capacity3,'s-',abscise,capacity9,'d-',abscise,
capacity18,'d-')
title (['\bfCapacité avec MIMO',...
' || filename: ',mfilename, '.m']);
xlabel('SNR (dB)'); ylabel('C (bits/s/Hz)');
legend('M=1','M=3','M=9','M=18');
grid on
hold on
```

```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 4.1: Capacité
%d'une transmission en fonction du SNR
clear
snrmin = 1; snrmax = 40; snrinc = 1;
abscise = [snrmin:snrinc:snrmax]; total = snrmax;
    Band = 1;
    for ind = 1:1:total
        courb_m_01(ind) = Band * (log (1+ ind))/ (log (2));
    end
    Band = 10;
    for ind = 1:1:total
        courb_m_02(ind) = Band * (log (1+ ind))/ (log (2));
    end
    Band = 100;
    for ind = 1:1:total
        courb_m_03(ind) = Band * (log (1+ ind))/ (log (2));
    end
figure;
semilogy(abscise,courb_m_01,'o-', abscise, courb_m_02,'d-', abscise, courb_m_03,'s-')
title ('\bfCapacité en fonction du SNR');
xlabel('SNR'); ylabel('Capacité, bits par secondes');
legend('Bandwidth: 1Hz', 'Bandwidth: 10Hz', 'Bandwidth: 100Hz');
grid on
hold on

figure;
plot(abscise,courb_m_01, abscise, courb_m_02, abscise, courb_m_03)
title (['\bfCapacité en fonction du SNR',...
        ' || filename: ',mfilename, '.m']);
xlabel('SNR'); ylabel('Capacité, bits par secondes');
legend('Bandwidth: 1Hz', 'Bandwidth: 10Hz', 'Bandwidth: 100Hz');
grid on
hold on
```

```
function [matC] = raycanal(Mligne,Ncolonne,scVariance);
```

```
matC = sqrt(scVariance/2)*(randn(Mligne,Ncolonne)+j*randn(Mligne,Ncolonne));
```

```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 4 de l'article 1
function [abscise,indexeff] = workart1fig4(N,M,numberiter)
abscise = [1:1:20];      % Range des valeurs de SNR en dB
Pe = power(10,-4);      % valeur fixé sur graph a 10-3,
                        % mais dit a 10-4 dans texte au sujet du graph
    numberiter = 100;

    % M = 16;          %nombre antenne base
    % N = 1;          %nombre de mobile

    for z = 1:1:20
        indexeff(z) = 0;
    end

    for zi = 1:1:numberiter
        matC = raycanal(M,N,0.5);
        matCh = matC';
        matId = eye(N);
        %sqrt(1/N) au lieu de '1' dans la ligne suivante ne
        %maximise pas les courbes... une des figures le démontre
        %clairement.
        matP = 1*eye(N);
        matPh = matP';
        matSup = matPh*matCh*matC*matP;

        for i = 1:1:20
            snr = 10^(abscise(i)/10);
            matMSEb = (matId + matSup*snr);
            matMSEa = inv(matMSEb);
            matMSE = diag(matMSEa);
            for ii = 1:1:N
                mu(ii) = (1-matMSE(ii))/matMSE(ii);
                indiceeff(ii) = log2( 1 + (1.5)*mu(ii)/(abs(log(Pe/2))) );
                proba(i,ii) = (indiceeff(ii));
            end
        end

        for z = 1:1:20
            indexeff(z) = indexeff(z) + proba(z,N);
        end

    end

    indexeff = indexeff/numberiter;
```

```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 4 de l'article 1
% Efficiency index pour cas d'ordres supérieurs
clear
% close all
% abscise,indexeff = workartlfig4(N,M,numberiter);
fix(clock);
tic
numberiter = 10000;
for ii = 2:2:8
    for jj = 1:1:4
        kk = 2^jj;
        [abscise(:, :, ii, kk), indexeff(:, :, ii, kk)] = workartlfig4(ii, kk, numberiter);
    end
end

figure;
spec={'b-', 'b-', 'b-', 'b-';...
      'r-', 'r-', 'r-', 'r-';...
      'k--', 'k--', 'k--', 'k--';...
      'm:', 'm:', 'm:', 'm:'};

for ii = 2:2:8
    for jj = 1:1:4
        kk = 2^jj;
        plot(abscise(:, :, ii, kk), indexeff(:, :, ii, kk), spec{jj, 1})
        text(20, indexeff(1, 20, ii, kk), ['N:', num2str(ii), ' M:', num2str(kk)]);
        hold on
    end
end

hgsave(['figures\fig_', mfilename, '_', datestr(now, 'mm-dd-HHMMSS'), '.fig']);
title(['\bfEfficiency index || filename: ', mfilename, '.m']);
xlabel('rho (dB)'); ylabel('Efficiency index');
grid on
hold on
toc
```



```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 5 de l'article 1
function [abscise,indexeff] = workart1fig5(N,M,numberiter)
Pe = power(10,-4);
abscise = [1:1:20];
%M = 16;
%N = 4;
%numberiter = 10000;

for z = 1:1:20
    indexeff(z) = 0;
end

for zi = 1:1:numberiter
    matC = raycanal(M,N,0.5);
    matCh = matC';
    eigon = eig(matCh*matC);

    for i = 1:1:20
        snr = 10^(abscise(i)/10);
        snrp = snr + 10^(8.2/10);
        sommeinterne = 0;
        for ii = 1:1:N
            indiceeff(ii) = log2( 1 + snr * eigon(ii) );
            sommeinterne = sommeinterne + indiceeff(ii);
        end
        proba(i) = sommeinterne * ( 1 / N );
    end
    for z = 1:1:20
        indexeff(z) = indexeff(z) + proba(z);
    end
end
indexeff = indexeff/numberiter;
```

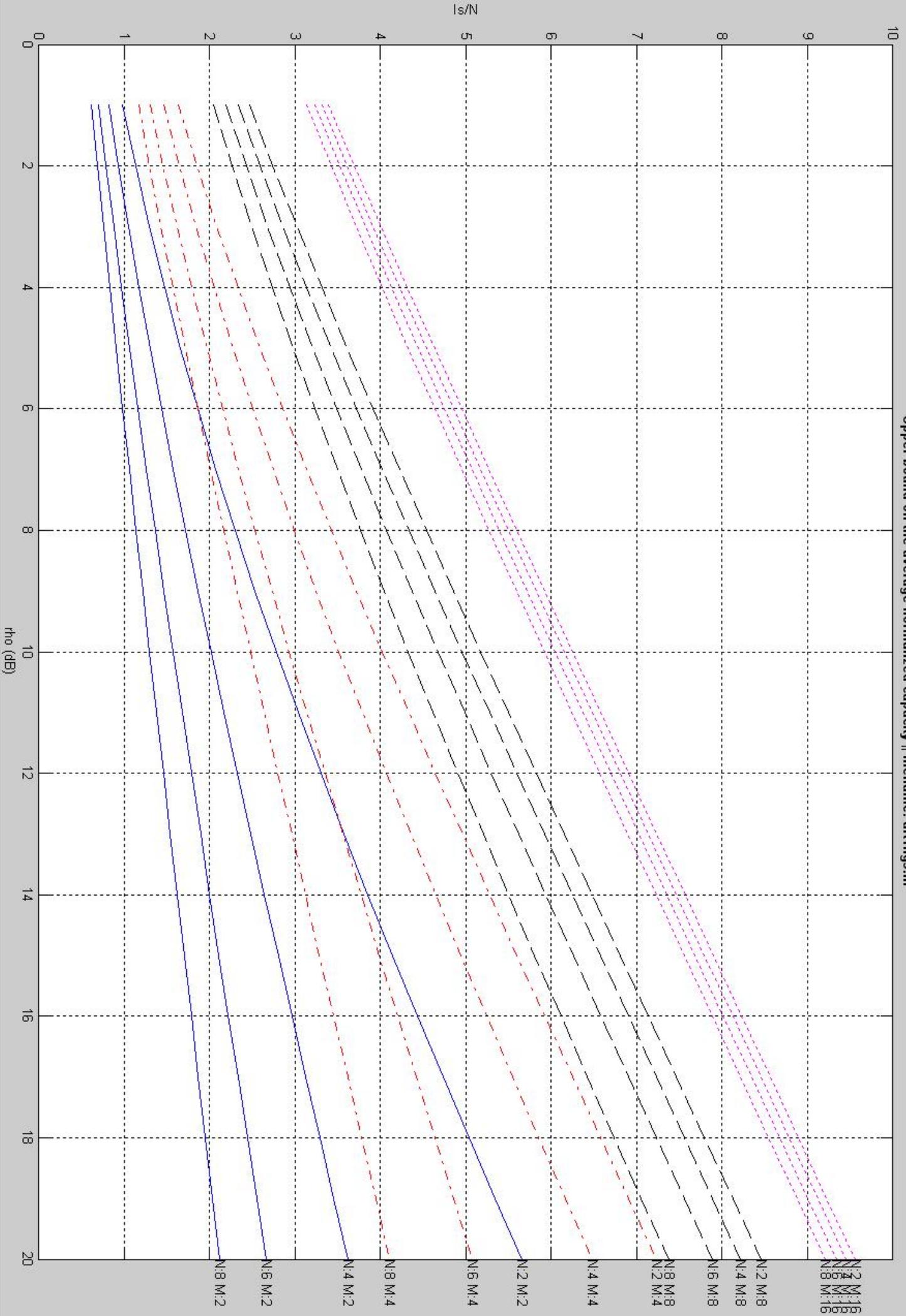
```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 5 de l'article 1
%Efficiency index moyenné
clear
% close all
% abscise,indexeff = workart1fig5(N,M,numberiter);
fix(clock);
tic
numberiter = 10000;
for ii = 2:2:8
    for jj = 1:1:4
        kk = 2^jj;
        [abscise(:,ii,kk),indexeff(:,ii,kk)] = workart1fig5(ii,kk,numberiter);
    end
end

figure;
spec={'b-','b-','b-','b-';...
      'r-.','r-.','r-.','r-.';...
      'k--','k--','k--','k--';...
      'm:','m:','m:','m:'};

for ii = 2:2:8
    for jj = 1:1:4
        kk = 2^jj;
        plot(abscise(:,ii,kk),indexeff(:,ii,kk),spec{jj,1})
        text(20,indexeff(20,ii,kk),['N:',num2str(ii),' M:',num2str(kk)]);
        hold on
    end
end

hgsave(['figures\fig_',mfilename,'_', datestr(now,'mm-dd-HHMMSS'),'fig']);
title(['\bfUpper bound on the average normalized capacity || filename: ',mfilename, '.\n
m']);
xlabel('rho (dB)'); ylabel('Efficiency index');
grid on
hold on
toc
```

Upper bound on the average normalized capacity || filename: artfig5.m



```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 7 de l'article 1
function [abscise,indexeff] = workart1fig7(N,M,numberiter)
abscise = [1:1:20];      % Range des valeurs de SNR en dB
Pe = power(10,-4);      % valeur fixé sur graph a 10-3,
                        % mais dit a 10-4 dans texte au sujet du graph
    numberiter = 100;
    M = 16;            %nombre antenne base
    N = 1;            %nombre de mobile

    for z = 1:1:20
        indexeff(z) = 0;
    end

    for zi = 1:1:numberiter
        matC = raycanal(M,N,0.5);
        matCh = matC';
        matId = eye(N);
        matP = sqrt(1/N)*eye(N);
        matPh = matP';
        matSup = matPh*matCh*matC*matP;

        for i = 1:1:20
            snr = 10^(abscise(i)/10);
            matMSEb = (matId + matSup*snr);
            matMSEa = inv(matMSEb);
            matMSE = diag(matMSEa);
            for ii = 1:1:N
                mu(ii) = (1-matMSE(ii))/matMSE(ii);
                indiceeff(ii) = log2( 1 + (1.5)*mu(ii)/(abs(log(Pe/2))) );
                proba(i,ii) = (indiceeff(ii));
            end
        end

        for z = 1:1:20
            indexeff(z) = indexeff(z) + proba(z,N);
        end

    end

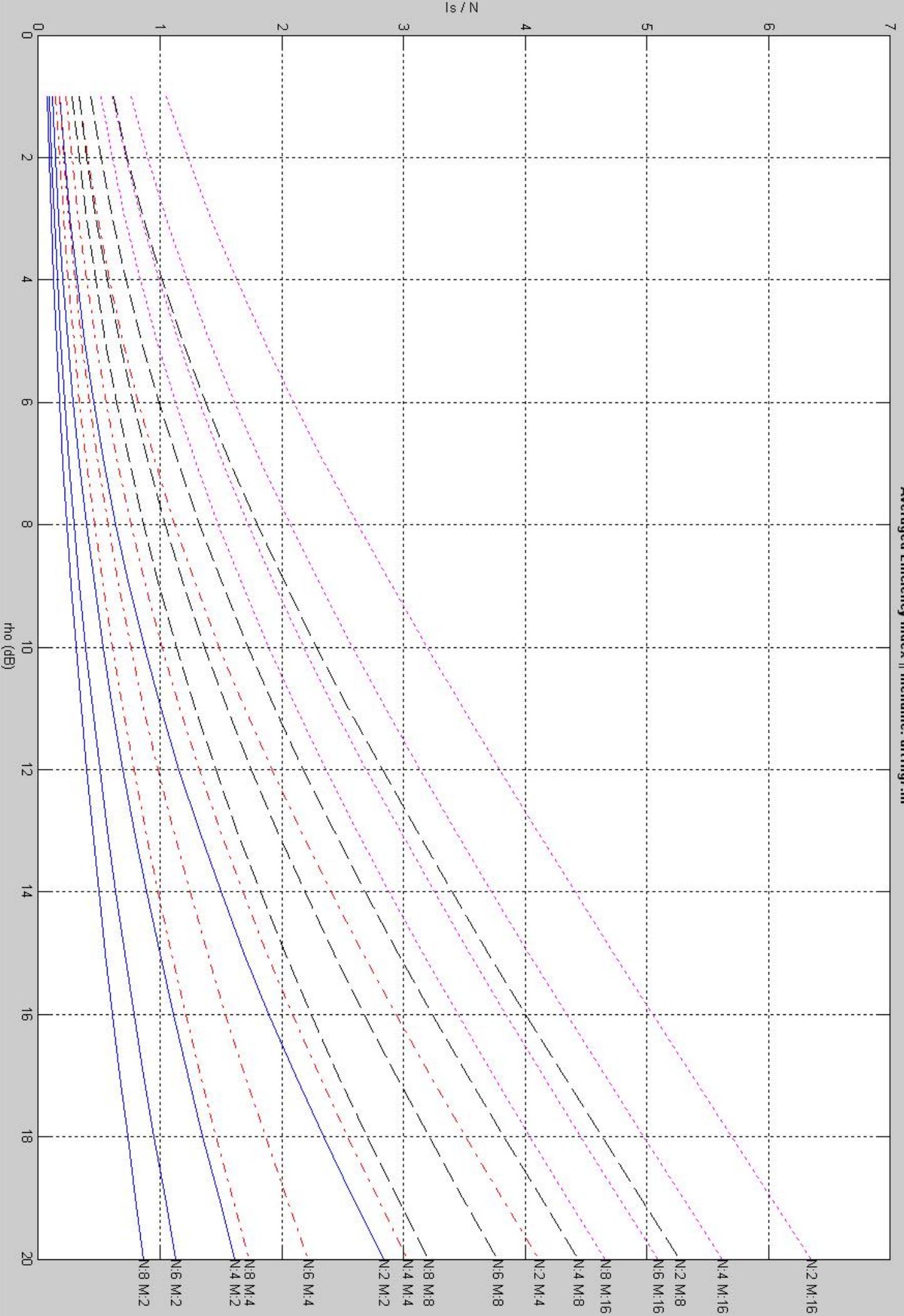
    indexeff = indexeff/numberiter;
```

```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 7 de l'article 1
% Efficiency index pour cas d'ordres supérieurs
clear
% close all
% abscise,indexeff = workartlfig7(N,M,numberiter);
fix(clock);
tic
numberiter = 10000;
for ii = 2:2:8
    for jj = 1:1:4
        kk = 2^jj;
        pack = [];
        temp = [];
        [abscise(:, :, ii, kk), indexeff(:, :, ii, kk)] = workartlfig7(ii, kk, 1);
        temp = indexeff;
        pack = indexeff;
        temp = temp * 0;
        pack = pack * 0;
        indexeff(:, :, ii, kk) = indexeff(:, :, ii, kk) * 0;

        for zb = ii:-1:1
            [abscise(:, :, ii, kk), pack(:, :, ii, kk)] = workartlfig7(zb, kk, numberiter);
            indexeff(:, :, ii, kk) = indexeff(:, :, ii, kk) + pack(:, :, ii, kk);
        end
        indexeff(:, :, ii, kk) = indexeff(:, :, ii, kk) * (1/ii);
    end
end

figure;
spec={'b-', 'b-', 'b-', 'b-';...
      'r-', 'r-', 'r-', 'r-';...
      'k--', 'k--', 'k--', 'k--';...
      'm:', 'm:', 'm:', 'm:'};

for ii = 2:2:8
    for jj = 1:1:4
        kk = 2^jj;
        plot(abscise(:, :, ii, kk), indexeff(:, :, ii, kk), spec{jj, 1})
        text(20, indexeff(1, 20, ii, kk), ['N:', num2str(ii), ' M:', num2str(kk)]);
        hold on
    end
end
end
hgsave(['figures\fig_', mfilename, '_', datestr(now, 'mm-dd-HHMMSS'), '.fig']);
title(['\bfAveraged Efficiency index || filename: ', mfilename, '.m']);
xlabel('rho (dB)'); ylabel('Is / N ');
grid on
hold on
toc
```



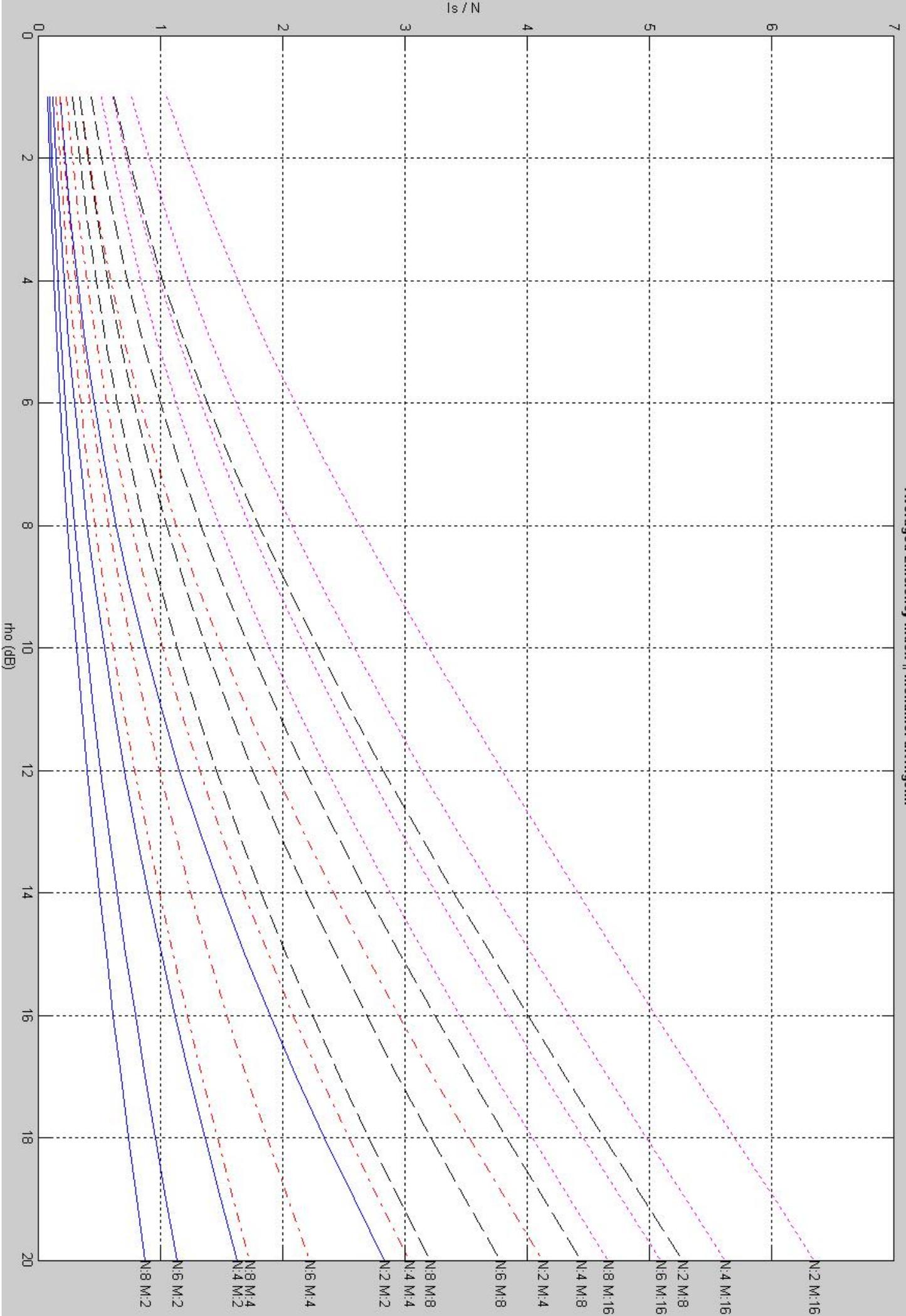
```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 8 de l'article 1
function [abscise,indexeff] = workart1fig8(N,M,numberiter)
abscise = [1:1:20]; % Range des valeurs de SNR en dB
Pe = power(10,-4); % valeur fixé sur graph a 10-3,
                    % mais dit a 10-4 dans texte au sujet du graph
    numberiter = 100;
    M = 16; %nombre antenne base
    N = 1; %nombre de mobile
for z = 1:1:20
    indexeff(z) = 0;
end

for zi = 1:1:numberiter
    matC = raycanal(M,N,0.5);
    matCh = matC';
    eicon = eig(matCh*matC);

    matId = eye(N);
    matP = 1*eye(N);%sqrt(1/N)
    matPdiag = diag(matP);
    matPh = matP';
    matSup = matPh*matCh*matC*matP;

    for i = 1:1:20
        snr = 10^(abscise(i)/10);
        snrp = snr + 10^(8.2/10);
        sommeinterne = 0;
        for ii = 1:1:N
            indiceeff(ii) = log2( 1 + (1.5)* snr * matPdiag(ii) * eicon(ii)/(abs(log
(Pe/2))) ) );
            sommeinterne = sommeinterne + indiceeff(ii);
        end
        proba(i) = sommeinterne * ( 1 / N );
    end
for z = 1:1:20
    indexeff(z) = indexeff(z) + proba(z);
end
end
indexeff = indexeff/numberiter;
```

```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 8 de l'article 1
% Efficiency index pour cas d'ordres supérieurs
clear; fix(clock); tic
numberiter = 10000;
for ii = 2:2:8
    for jj = 1:1:4
        kk = 2^jj;
        pack = [];          temp = [];
        [abscise(:, :, ii, kk), indexeff(:, :, ii, kk)] = workart1fig8(ii, kk, 1);
        temp = indexeff;    pack = indexeff;
        temp = temp * 0;    pack = pack * 0;
        indexeff(:, :, ii, kk) = indexeff(:, :, ii, kk) * 0;
        for zb = ii:-1:1
            [abscise(:, :, ii, kk), pack(:, :, ii, kk)] = workart1fig7(zb, kk, numberiter);
            indexeff(:, :, ii, kk) = indexeff(:, :, ii, kk) + pack(:, :, ii, kk);
        end
        indexeff(:, :, ii, kk) = indexeff(:, :, ii, kk) * (1/ii);
    end
end
figure;
spec={'b-'; 'r-.'; 'k--'; 'm:'};
for ii = 2:2:8
    for jj = 1:1:4
        kk = 2^jj;
        plot(abscise(:, :, ii, kk), indexeff(:, :, ii, kk), spec{jj, 1})
        text(20, indexeff(1, 20, ii, kk), ['N:', num2str(ii), ' M:', num2str(kk)]);
        hold on
    end
end
hgsave(['figures\fig_', mfilename, '_', datestr(now, 'mm-dd-HHMMSS'), '.fig']);
title(['\bAveraged Efficiency index | filename: ', mfilename, '.m']);
xlabel('rho (dB)'); ylabel('Is / N '); grid on; hold on; toc
```



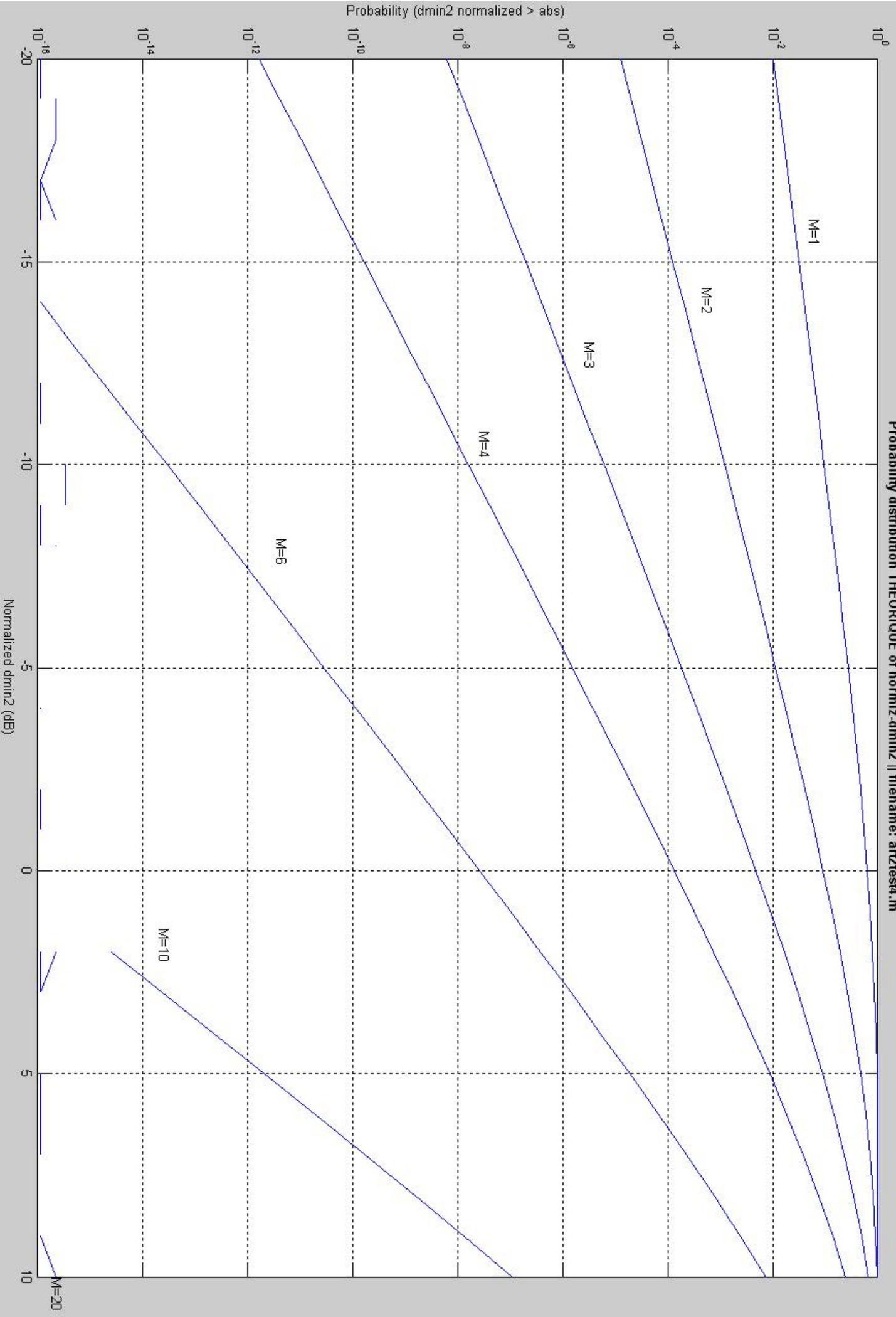
```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 4 de l'article 2
% probabilité
timerstart = fix(clock);
tic;

M1=[1 2 3 4 6 10 20 30];
M1=[1 2 3 4 6 10 20 30];
for i = 1:length(M1);
    M=M1(i);
    max = 10;
    xi=-20:1:max;
    for j=1:length(xi)

        mxi = 10^(xi(j)/10);

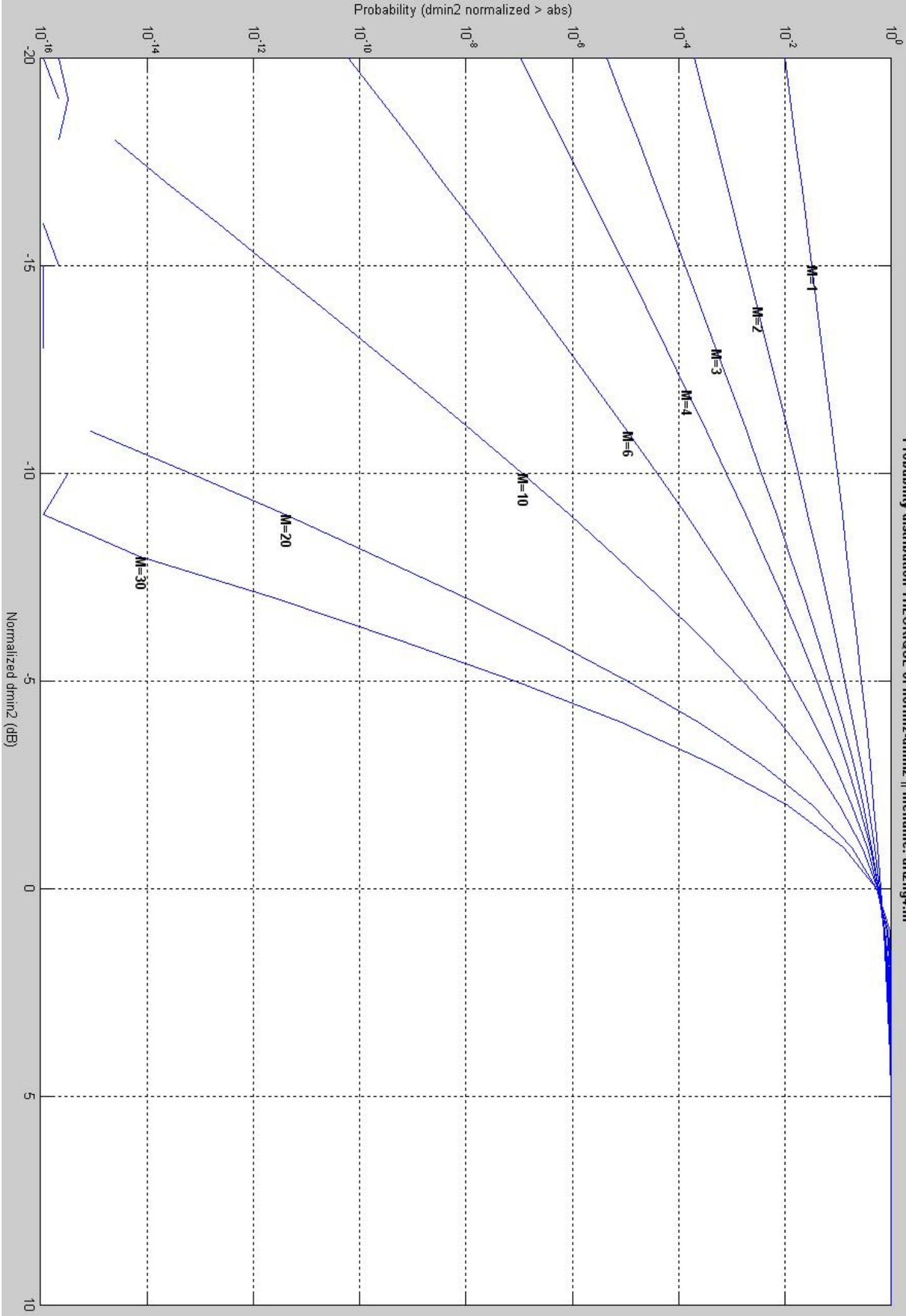
        sum1 = 0;
        fract = mxi/M;
        for ki=1:1:M
            topf = (fract)^(ki-1);
            botf = factorial(ki-1);
            sum1 = sum1 + (topf/botf);
        end
        px(i,j) = 1 - ((exp(-fract))* sum1 );
    end
end

figure;
for i = 1:length(M1);
    M=M1(i);
    semilogy(xi,px(i,:));
    text(10,px(i,31),['M=',num2str(M)]);
    hold on
end
hgsave(['figures\fig_',mfilename,'_', datestr(now,'mm-dd-HHMMSS'),'fig']);
title(['\bfProbability distribution THÉORIQUE of normlz-dmin2 || filename: ',mfilename,
'.m']);
xlabel('Normalized dmin2 (dB)'); ylabel('Probability (dmin2 normalized > abs) ');
grid on;
hold on;
ela = toc;
```



```
%CODE MATLAB SERVANT À LA RÉALISATION DE LA FIGURE 4 de l'article 2
% probabilité
timerstart = fix(clock);
tic;
M1=[1 2 3 4 6 10 20 30];
for i = 1:length(M1);
    M=M1(i)
    max = 10;
    xi=-20:1:max;
    for j=1:length(xi)
        mxi = 10^(xi(j)/10);
        sum1 = 0;
        fract = mxi*M;
        for ki=1:1:M
            topf = (fract)^(ki-1);
            botf = factorial(ki-1);
            sum1 = sum1 + (topf/botf);
        end
        px(i,j) = 1 - ((exp(-fract))* sum1 );
    end
end
figure;
for i = 1:length(M1);
    M=M1(i);
    semilogy(xi,px(i,:));
    %text(10,px(i,31),['M=',num2str(M)]);
    text(xi(i+5),px(i,i+5),['M=',num2str(M)]);
    hold on
end
hgsave(['figures\fig_',mfilename,'_', datestr(now,'mm-dd-HHMMSS'),'.fig']);
title (['\bfProbability distribution THÉORIQUE of normlz-dmin2 || filename: ',mfilename,
'.m']);
xlabel('Normalized dmin2 (dB)'); ylabel('Probability (dmin2 normalized > abs) ');
grid on;
hold on;
ela = toc;
```

Probability distribution THEORIQUE of normlz-dmin2 || filename: ar2fig4.m



# On the Capacity of Radio Communication Systems with Diversity in a Rayleigh Fading Environment

JACK H. WINTERS, MEMBER, IEEE

**Abstract**—In this paper, we study the fundamental limits on the data rate of multiple antenna systems in a Rayleigh fading environment. With  $M$  transmit and  $M$  receive antennas, up to  $M$  independent channels can be established in the same bandwidth. We study the distribution of the maximum data rate at a given error rate in the channels between up to  $M$  transmit antennas and  $M$  receive antennas and determine the outage probability for systems that use various signal processing techniques. We analyze the performance of the optimum linear and nonlinear receiver processor and the optimum linear transmitter/receiver processor pair, and the capacity of these channels. Results show that with optimum linear processing at the receiver, up to  $M/2$  channels can be established with approximately the same maximum data rate as a single channel. With either nonlinear processing at the receiver or optimum linear transmitter/receiver processing, up to  $M$  channels can be established with approximately the same maximum data rate as a single channel. Results show the potential for large capacity in systems with limited bandwidth.

## I. INTRODUCTION

IN a radio communication system in a multipath environment, such as a mobile radio or indoor wireless system, the communication channels between multiple transmit and/or receive antennas can have low cross correlation even when the transmit or receive antennas are closely spaced. Thus, communication systems, with appropriate signal processing techniques, can use antenna diversity (e.g., space, direction, or polarization) to establish multiple independent channels within the same bandwidth between the transmitters and receivers, thereby achieving large capacity despite the multipath.

One signal processing technique that can be used to permit multiple simultaneous signals in the same bandwidth is optimum combining at the receiver [1].<sup>1</sup> With optimum combining, the signals received by the antennas are combined to enhance desired signal reception and suppress interfering signals, and thereby maximize the signal-to-noise-plus-interference power in the output. With optimum combining using  $M$  antennas, up to  $M - 1$  interfering signals can be nulled with desired signal reception,

thus permitting up to  $M$  simultaneous signals in the same bandwidth. However, optimum combining is only the best linear processing technique for the receiver, and other techniques can be used to further improve performance. In particular, since all signals are detected at the receiver, interference cancellers can be used to eliminate the interference in the output signals, i.e., performance can be improved through nonlinear techniques. In addition, coding can further improve performance. Finally, performance can also be improved by cooperation between transmit antennas, i.e., appropriate combining of the signals prior to transmission (with multiple transmit antennas at the remotes). In this paper, we study two basic systems, 1) communication between multiple remotes and a base station with multiple antennas, and 2) communication between two users, each with multiple antennas. For these systems, we determine the information-theoretic capacity and the efficiency index (maximum data rate for a given error rate) in bits/cycle (bits/s/Hz) for different processing techniques. Note that since the multipath changes with position, the capacity (and efficiency index) is a random variable. Therefore, we study the distribution of the capacity and present results for given outage probability. Efficiency index results are given for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate. We assume independent flat (nondispersive) Rayleigh fading between antennas and constrain the total transmit power per user (remote or base station). With  $M$  transmit and  $M$  receive antennas, we note that there can be up to  $M$  independent channels between the transmitter(s) and receiver. Therefore, in case 1), for a base station with  $M$  antennas, we study the maximum data rate per remote as up to  $M$  remotes access the system. In case 2), for a receiver with  $M$  antennas, we study the maximum total data rate for the channels between the receiver and a transmitter with up to  $M$  antennas.

For communication between remotes and a base station with  $M$  antennas, we first study the efficiency index per remote (at a  $10^{-3}$  outage probability) with optimum linear processing at the base station receiver. Results show that the efficiency index per remote decreases only slightly as up to  $M/2$  remotes access the system. However, with  $M$  remotes, the efficiency index per remote is dramatically lower. We then study the efficiency index per remote with optimum nonlinear processing (maximum likelihood detection) at the base station receiver. Results show that the efficiency index per remote decreases only slightly as up to  $M$  remotes access the system. For example, with four

Manuscript received August 14, 1986; revised January 30, 1987.  
The author is with AT&T Bell Laboratories, Holmdel, NJ 07733.  
IEEE Log Number 8714182.

<sup>1</sup>In [1], optimum combining at the receiver is studied in a cellular mobile radio system. The signals received by the antennas at the base station are combined to enhance desired signal reception and suppress interfering signals from other cells, thereby allowing for frequency reuse in adjacent cells. In this paper, we consider using optimum combining, plus other techniques, to permit frequency reuse within the same cell, thereby achieving even greater capacity. Specific details on the implementation of optimum combining with frequency reuse within the same cell are presented in [2] for indoor radio.

antennas at a base station, for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate with binary phase-shift keying, the required average received signal-to-noise ratio is 13 dB with a single remote and 15 dB (only 2 dB higher) with four cochannel remotes. Finally, we study the Shannon capacity of this system.

For communication between two users, one with  $M$  antennas and the other with up to  $M$  antennas (with a total transmit power constraint on each user), we study the efficiency index with optimum linear processing at one receiver, the efficiency index with the optimum linear transmitter and receiver processing pair, and the system capacity. The efficiency index and capacity per channel (transmit antenna) for these three cases are similar to the efficiency index and capacity per remote for the three cases with the multiple remote system, considering the power constraint. For example, with the optimum linear transmitter/receiver processing pair and four antennas at the receiver, for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate, the required average received signal-to-noise ratio is 17 dB with one quaternary phase-shift keyed signal transmitted by one antenna and 18 dB (only 1 dB higher) with four signals transmitted by four antennas.

In Section II, we study the capacity of the system with a base station and multiple remotes. The capacity of the system with two users is analyzed in Section III. A summary and conclusions are presented in Section IV.

## II. BASE STATION WITH REMOTES

### A. System Description

Fig. 1 shows a radio system consisting of a base station with  $M$  antennas and  $N$  ( $N \leq M$ ) remotes, each with one antenna. We assume 1) a transmit power constraint on each remote and the base station, 2) independent Rayleigh (nondispersive) fading between each remote and base station antenna, 3) no direct communication between remotes (i.e., except through the base station), and 4) independent additive Gaussian noise at each base station receive antenna.

The system can also be represented in matrix form as in Fig. 2. The  $N$  independent input data streams can be expressed in vector form, with the  $n$ th input vector given by

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{N,n} \end{bmatrix} \quad (1)$$

where the  $a_{i,n}$  are complex. We assume  $L$ -level quadrature amplitude modulation (QAM) such that the real and imaginary parts of  $a_{i,n}$  take on values of  $[\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (L-1)]/\sigma_d$  where  $\sigma_d^2 = E[|a_{i,n}|^2] = 2(L^2-1)/3$  (for signals with unity average power). The input vector is multiplied by the transmitter matrix  $\mathbf{P}$  to generate the transmitted vector  $\mathbf{P}\mathbf{A}_n$ . Since we assume no direct communication between remotes,  $\mathbf{P}$  is a diagonal matrix, i.e.,

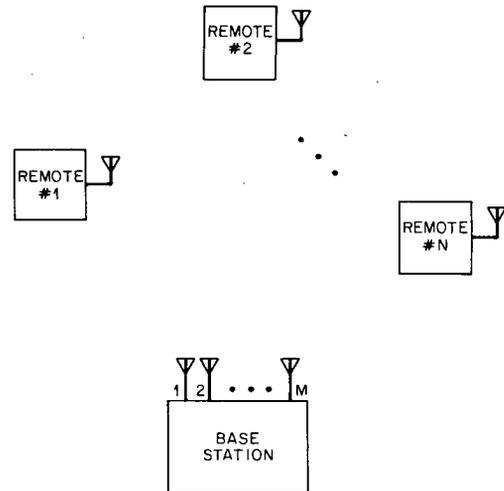


Fig. 1. Radio system consisting of a base station with  $M$  antennas and  $N$  remotes, each with one antenna.

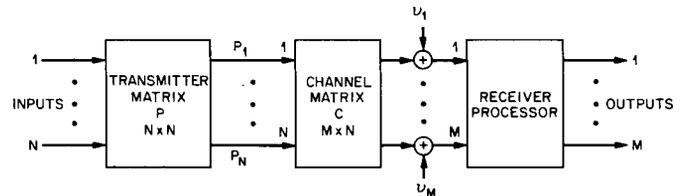


Fig. 2. System represented in matrix form.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{P_1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \sqrt{P_N} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Thus, the transmitted power of the  $i$ th signal (data stream) is given by

$$P_i = [\mathbf{P}^\dagger \mathbf{P}]_{ii}, \quad i = 1, N \quad (3)$$

where  $[\mathbf{P}^\dagger \mathbf{P}]_{ii}$  is the  $i$ th diagonal element of  $\mathbf{P}^\dagger \mathbf{P}$  and the superscript  $\dagger$  denotes complex conjugate transpose. We constrain the transmit power of each remote such that

$$P_i \leq 1, \quad i = 1, N. \quad (4)$$

The signal vector received by the  $M$  antennas at the base station is the transmitted signal vector multiplied by the channel matrix  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{A}_n$ , plus additive Gaussian noise. Under the assumption of independent Rayleigh fading, the elements of the  $M \times N$  channel matrix  $C_{ij}$  are complex Gaussian random variables, i.e., the real and imaginary parts of  $C_{ij}$  are Gaussian random variables with zero mean and a variance of  $\frac{1}{2}$  (for equal average transmit and receive powers). The noise vector  $\mathbf{v}_n$  is given by

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} v_{1,n} \\ \vdots \\ v_{M,n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

where  $v_{i,n}$  are independent, complex Gaussian random variables, i.e., the real and imaginary parts are Gaussian

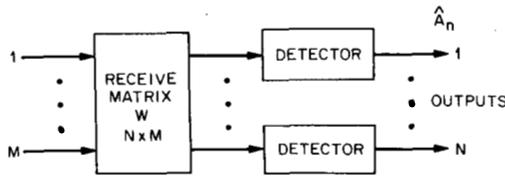


Fig. 3. A linear receiver processor.

random variables with zero mean and variance  $\sigma_n^2/2$ . The received signal vector  $S_n$  is then given by

$$S_n = CPA_n + v_n. \quad (6)$$

The  $M$  received signals are processed at the receiver to generate the output signal vector  $\hat{A}_n$  (an estimate of the transmitted signal vector).

The system shown in Fig. 2 is similar to that studied for digital radio [3]–[6]. In [3], a single-channel ( $N = M = 1$ ) digital radio system with frequency selective fading (dispersion) is studied. The performance of equalization and maximum likelihood sequence estimation is analyzed, using the probability distribution of the efficiency index as the performance measure. The efficiency index is an estimate of the maximum number of bits per cycle of bandwidth that can be achieved in a given system and, in [3], it is obtained by using a Chernoff bound on the error rate for given signal-to-noise ratio, channel bandwidth, and signaling rate with quadrature amplitude modulation. In [4], the analysis of [3] is extended to digital radio with dual polarization ( $N = M = 2$ ). The structure of the optimum transmitter and receiver matrix filters is studied, and the information-theoretic capacity and efficiency index with these filters is analyzed. In [5], the results of [4] are extended to the  $N \times N$  channel matrix, and in [6], the results are extended to the  $M \times N$  channel matrix. For our system, one major difference from digital radio is that we do not have dispersive fading. Therefore, in our study, we use the extensive analysis of [3]–[6], simplifying the results for nondispersive fading.

### B. Optimum Linear Processing

We first consider linear processing at the base station receiver. The linear processor is shown in Fig. 3 where the received signals are combined using the receiver  $N \times M$  matrix  $W$  to generate the output signals for detection. Thus, at the output of the linear processor, the  $n$ th output vector is given by

$$Z_n = W[CPA_n + v_n]. \quad (7)$$

The detected symbols  $\hat{A}_n$  are determined from the real and imaginary parts of  $Z_n$  using a decision rule with decision levels at  $[0, \pm 2, \dots, \pm(L-2)]/\sigma_d$  (for  $L$ -level QAM).

We consider an optimum linear processor as optimum in the sense of minimizing the mean-squared error MSE of each of the  $N$  output signals. Note that the receive matrix  $W$  that minimizes the MSE is the same matrix as that which maximizes the signal-to-interference-plus-noise ratio (optimum combining, as studied in [1]) [7]. Further-

more, this optimum  $W$  also minimizes an upper bound on the symbol error rate [3].

For a QAM signal with optimum linear processing at the receiver, the MSE in each of the output signals is given by [4]

$$\text{MSE}_i = \frac{\overline{\text{MSE}_i}}{\sigma_d^2} = [I + P^\dagger C^\dagger C P P]_{ii}^{-1}, \quad i = 1, N \quad (8)$$

where  $\rho (= \sigma_d^2/\sigma_n^2)$  is the received signal-to-noise ratio at each antenna without fading (i.e., the signal-to-noise ratio averaged over the Rayleigh fading). For each of the  $N$  signals, the maximum data rate that can be supported at a given symbol error rate  $P_e$  (the efficiency index) is then given by [4]

$$I_i = \log_2 \left( 1 + 1.5 \mu_i / \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right), \quad i = 1, N \quad (9)$$

where

$$\mu_i = (1 - \text{MSE}_i) \text{MSE}_i. \quad (10)$$

For  $N = 1$ , the efficiency index is the highest when  $P_1 = 1$  [for the power constraint of (4)]. Thus, from (8)–(10),

$$I_1 = \log_2 \left( 1 + 1.5 \rho C^\dagger C / \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right). \quad (11)$$

Since  $C^\dagger C$  is the sum of the magnitude squared of complex Gaussian random variables with zero mean and a variance of  $\frac{1}{2}$ ,  $C^\dagger C$  is a chi-squared random variable with  $2M$  degrees of freedom. Thus, the probability density function of  $C^\dagger C$  is given by

$$p(C^\dagger C) = \frac{(C^\dagger C)^{M-1} e^{-C^\dagger C}}{(M-1)!}. \quad (12)$$

From (11) and (12), the probability density function of  $I_1$  can be shown to be given by

$$p(I_1) = \frac{(2^{I_1} - 1)^{M-1} e^{-(2^{I_1}-1)/\alpha} 2^{I_1} \ln 2}{\alpha^M (M-1)!} \quad (13)$$

where

$$\alpha = 1.5 \rho / \left| \ln \frac{P_e}{2} \right|. \quad (14)$$

Thus, the probability distribution of  $I_1$  can be calculated as

$$P(I_1) = 1 - e^{-(2^{I_1}-1)/\alpha} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\left( \frac{2^{I_1}-1}{\alpha} \right)^k}{k!}. \quad (15)$$

Since with  $N = 1$  optimum linear processing is the same as maximal ratio combining, (15) can also be determined from the maximal ratio combining equations in [8].

For  $N \geq 2$ , the values of the  $P_i$ 's ( $i = 1, N$ ) for the maximum efficiency index per remote could not be easily determined. Therefore, implementation of a system that optimizes the  $P_i$ 's does not appear to be practical. Since

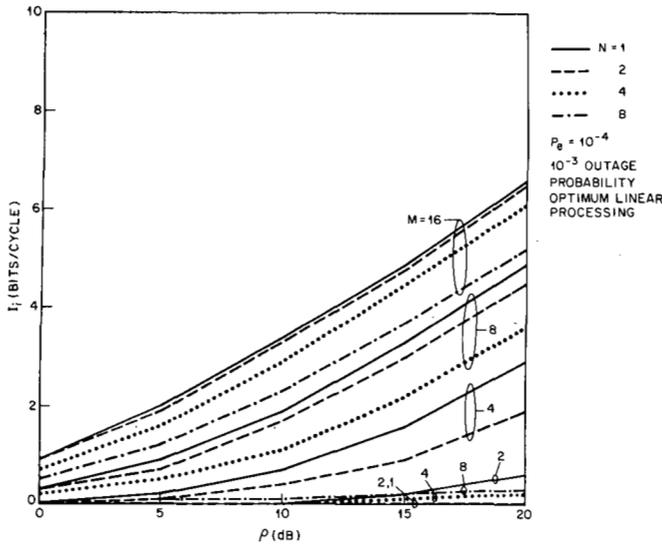


Fig. 4. The efficiency index per remote versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate for optimum linear processing at the base station receiver;  $N$  remotes and  $M$  antennas at the base station.

one practical technique is to adjust the transmit powers such that the received signal power for each signal is constant, we first examined this case. For this system,

$$P_i = \frac{\min_j [C^\dagger C]_{jj}}{[C^\dagger C]_{ii}}, \quad i = 1, N. \quad (16)$$

Results, however, show that the efficiency index is slightly higher when  $P_i = 1$ ,  $i = 1, N$ . Therefore, in the analysis below, we only present results for  $P_i = 1$  ( $i = 1, N$ ), noting that the results do not appear to be significantly affected by small variations in  $P_i$ .

For  $N \geq 2$ , the distribution of  $I_i$  was determined by Monte Carlo simulation. For given  $N$ ,  $M$ ,  $\rho$ , and  $P_e$ , the  $I_i$ 's ( $i = 1, N$ ) were calculated for  $10^4$  randomly generated  $C$  matrices. The distribution of these  $I_i$ 's then determined the outage probability.

Fig. 4 shows the efficiency index versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate, with  $N = 1, 2, 4, 8$ , and  $M = 1, 2, 4, 8, 16$ . Analytical results are shown for  $N = 1$ , and computer simulation results are shown for  $N \geq 2$ . For fixed  $M$ , the efficiency index per remote decreases as  $N$  increases (i.e., as more remotes access the system). Fig. 4 shows that the decrease in the efficiency index is small as  $N$  is increased from 1 to  $M/2$ , but for  $N = M$ , the efficiency index decreases dramatically. This is because, for  $N \ll M$ ,  $N$  random signal vectors in an  $M$ -dimensional space (with  $M$  antennas) usually have low cross correlation (i.e., interference), and therefore,  $I_i$  is not significantly affected by the interference. However, as  $N$  approaches  $M$  (in particular, for  $N > M/2$ ),  $N$  random signal vectors become increasingly likely to have high cross correlation (interference), and thus,  $I_i$  is greatly reduced by the interference.

Finally, considering implementation of optimum linear processing [1], [2], we note that the optimum  $W$  can be

determined without knowledge of the  $C$  matrix by means of iterative techniques, such as the LMS algorithm [7]. Also, for base station to remote transmission,  $W^*$  (where  $*$  denotes complex conjugate) can be used as the transmitter matrix to obtain the same efficiency index as with remote to base station transmission. It should be emphasized that the major concern for implementation of the techniques in this paper is the fading rate. The processors must operate fast enough to track the fading [1], [2], and, if  $C$  must be known, the channel must be probed often enough so that the fading can be tracked. Thus, implementation may be much easier in indoor radio systems (where the users are stationary or walking) than in mobile radio systems (where the users can move at vehicular speeds). Also, it should be noted that our results are based on the assumption of nearly independent fading at each antenna. With multipath in buildings, the fading statistics of two antennas are (usually) nearly independent when the antennas are separated by more than a quarter wavelength. Furthermore, in addition to space diversity, direction [9], polarization [10], [11], and field [8] diversity can be used to achieve nearly independent fading at each antenna without increasing the physical size of the antenna array.

### C. Optimum Nonlinear Processing

We now consider nonlinear processing at the base station receiver. We consider an optimum nonlinear processor as optimum in the sense of minimizing the probability of error in detecting  $A_n$ . Thus, the optimum nonlinear processor is a maximum likelihood detector [6], [12]. For a maximum likelihood detector, the error rate is approximately given by

$$P_e \approx e^{-d_{\min}^2 \rho / 4} \quad (17)$$

where

$$d_{\min}^2 = \min_{\substack{A_n, \hat{A}_n \\ A_n \neq \hat{A}_n}} |CP(A_n - \hat{A}_n)|^2. \quad (18)$$

Thus, given  $C$ ,  $P$ , and  $L$  (number of levels for QAM), we can calculate the error rate at a given  $\rho$  by exhaustively searching all  $A_n$  and  $\hat{A}_n$  for  $d_{\min}^2$  and calculating  $P_e$  from (17). The efficiency index per remote is then  $2 \log_2 L$ . However, this procedure requires extensive computer time for large  $L$  and  $N$ . Therefore, we restrict our study to quaternary phase-shift keying QPSK ( $L = 2$ ) with  $N = 1$  and 2, and binary phase-shift keying BPSK with  $N = 1, 2$ , and 4. Note that for BPSK, the data symbols  $a_{i,n}$  in (1) are real, with values of  $\pm 1$ .

We determined the  $\rho$  required for QPSK ( $I_i = 2$ ) and BPSK ( $I_i = 1$ ) by the following method. Using Monte Carlo simulation, for given  $N$  and  $M$ ,  $10^4$  random  $C$  matrices were generated. For each matrix,  $d_{\min}^2$  was determined by exhaustive search of the possible combinations of data symbols for either QPSK or BPSK, and the  $\rho$  required for a given  $P_e$  was calculated from (17). From the distribution of required  $\rho$ , we determined the  $\rho$  for a given outage probability.

TABLE I  
AVERAGE SIGNAL-TO-NOISE RATIO REQUIRED FOR A  $10^{-3}$  OUTAGE  
PROBABILITY AT A  $10^{-4}$  ERROR RATE, WITH OPTIMUM NONLINEAR AND  
OPTIMUM LINEAR PROCESSING

M	N	Required $\rho$ (dB)			
		BPSK		QPSK	
		nonlinear	linear	nonlinear	linear
1	1	39.6	39.6	43.0	43.0
	2	23.0	23.0	26.4	26.4
4	1	13.3	13.3	16.7	16.7
	2	13.9	16.7	17.3	20.5
	4	15.1	40.0	-	42.7
8	1	6.7	6.7	10.1	10.1
	2	7.1	8.3	10.5	11.2
	4	7.5	10.8	-	14.0
16	1	1.5	1.5	4.9	4.9
	2	1.7	2.1	5.1	5.4
	4	2.2	3.3	-	6.5

As in Section II-B, the  $P_i$ 's ( $i = 1, N$ ) that maximize  $d_{\min}^2$  are difficult to calculate. Therefore, we study only the case of  $P_i = 1$  ( $i = 1, N$ ). Note also that for the optimum nonlinear processor, we calculated the error rate for the output vector rather than the output symbols as studied for the optimum linear processor. Thus, for given  $C$ , the efficiency index is the same for all remotes, unlike with optimum linear processing.

Since results were obtained only for QPSK and BPSK, we study the  $\rho$  required for these two modulation techniques, and compare the required  $\rho$  to optimum nonlinear processing to that with optimum linear processing. For QPSK, the required  $\rho$  for optimum linear processing with  $I_i = 2$  can be obtained as in Section II-B. For BPSK ( $I_i = 1$ ), the required  $\rho$  with optimum linear processing can also be obtained as in Section II-B, but with the efficiency index given by

$$I_i = \frac{1}{2} \log_2 (1 + 3 \mu_i / |\ln P_e|), \quad i = 1, N \quad (19)$$

rather than (9).

Table I shows the  $\rho$  required for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate for QPSK and BPSK with given  $N$  and  $M$ . For fixed  $M$ , the required  $\rho$  increases as  $N$  increases with both optimum linear and nonlinear processing. However, with optimum nonlinear processing, up to  $M$  remotes can access the system with only a few dB increase in  $\rho$ , while with optimum linear processing,  $\rho$  increases dramatically with  $N = M$ . Thus, optimum nonlinear processing is significantly better than optimum linear processing only for  $N > M/2$ .

Finally, considering implementation of optimum non-

linear processing, we note that optimum nonlinear processing requires that  $C$  be known at the receiver. Thus, the channel must be probed prior to data transmission. However, performance close to that of optimum nonlinear processing can be achieved without a knowledge of  $C$  through the use of optimum linear processing followed by interference cancellation (such as with a bootstrap canceller [13]), but such a system has not been studied. Also, we note that we cannot use optimum nonlinear processing for base station to remote transmission and, therefore, the efficiency index for base station to remote transmission without coding can only be as high as that of optimum linear processing (Section II-B).

#### D. Capacity

Finally, we consider the distribution of an upper bound on the capacity normalized to the bandwidth for the channels between the remotes and the base station. If the remotes' signals were weighted and combined prior to transmission to the base station, the normalized capacity can be determined by analyzing the independent channels in  $C$  [4]. From [4], for given  $C$ , the normalized capacity of the  $i$ th independent channel is given by

$$I_i = \log_2 (1 + \rho \lambda_i P_i), \quad i = 1, N \quad (20)$$

where  $\lambda_i$  is the  $i$ th eigenvalue of  $C^\dagger C$ . Since the channels are independent (i.e., no cross-coupled interference),  $P_i = 1$  ( $i = 1, N$ ) maximizes the capacity in each channel. Thus, for given  $C$ , the average capacity per remote is given by

$$I_s/N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2 (1 + \rho \lambda_i). \quad (21)$$

Without the combining of the signals prior to transmission (i.e., with each remote transmitting only its signal), the average capacity per remote is less than or equal to (for  $N = 1$ ) that given by (21). Thus, (21) upper bounds the average capacity per remote.

For  $N = 1$ ,  $\lambda_1 = C^\dagger C$ , and, therefore, from (15), the distribution of the normalized capacity is given by

$$P(I_1) = 1 - e^{-(2^h - 1)/\rho} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{2^h - 1}{\rho}\right)^k}{k!}. \quad (22)$$

Thus, the normalized capacity at  $\rho'$  is the same as the efficiency index for a  $10^{-4}$  error rate without coding at  $\rho = \rho' |\ln(P_e/2)|/1.5$  (or  $\rho = \rho' + 8.2$  dB).

For  $N \geq 2$ , Monte Carlo simulation was again used to determine the distribution of the average normalized capacity. For given  $N$ ,  $M$ , and  $\rho$ , the  $I_i$ 's and  $I_s/N$  were determined for  $10^4$  randomly generated  $C$  matrices, and the distribution of  $I_s/N$  was calculated.

Fig. 5 shows the upper bound on the average normalized capacity per remote at a  $10^{-3}$  outage probability versus  $\rho$  for  $N = 1, 2, 4, 8$  and  $M = 1, 2, 4, 8, 16$ . For fixed  $M$ , in most cases the capacity increases with  $N$ , since as  $N$  increases,  $I_s/N$  is averaged over more channels. Note that

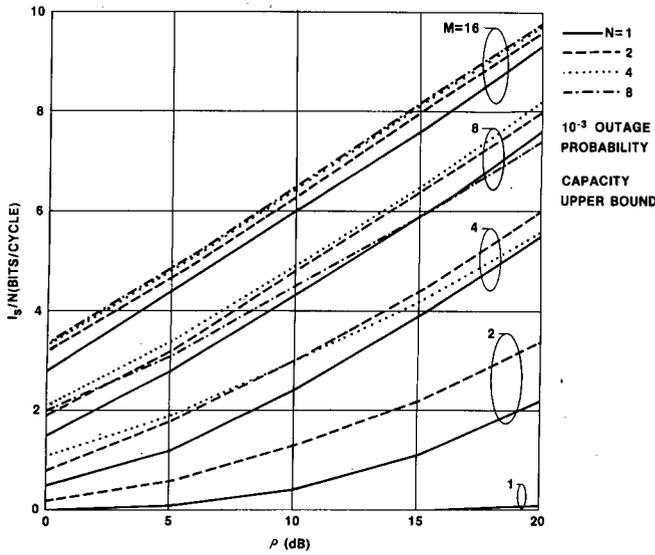


Fig. 5. Upper bound on the average normalized capacity per remote versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability with  $N$  remotes and a base station with  $M$  antennas.

this increase in capacity with  $N$  is greatest for small  $M$  where the fading effects are the strongest. However, for fixed  $M$ , as  $N$  increases, the interference also increases, which reduces the capacity. Whether the combined effect of the averaging and interference increases or decreases the capacity depends on  $N$ ,  $M$ , and  $\rho$ . Fig. 5 shows that the interference dominates (with the capacity reduced) for  $N = M$ ,  $M \geq 4$ , and that the reduction in capacity increases with  $\rho$ .

### III. TWO USERS WITH MULTIPLE ANTENNAS

#### A. System Description

Fig. 6 shows a radio system consisting of two users, one with  $M$  antennas and the other with  $N$  ( $N \leq M$ ) antennas. We assume 1) a transmit power constraint on both users, 2) independent Rayleigh (nondispersive) fading between the transmit and receive antennas, and 3) independent additive Gaussian noise at each receiver antenna. With multiple antennas for both users, the same maximum data rate can be obtained in both transmission directions. We study only the case of linear processing at both the transmitter and receiver.

The system can be represented in matrix form as in Section II. The differences with the system of Section II are, first, with multiple transmit antennas, the input signals can be combined prior to transmission, i.e.,  $\mathbf{P}$  need not be diagonal. Second, with the power constraint

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{P}^\dagger \mathbf{P}]_{ii} = 1, \quad (23)$$

the total transmit power is  $1/N$  times the total transmit power of the system of Section II. Third, we are interested in the maximum total data rate for given  $\mathbf{C}$  and the distribution of this data rate, rather than the distribution of the maximum data rate in each channel.



Fig. 6. Radio system consisting of two users, one with  $M$  antennas and the other with  $N$  antennas.

#### B. Optimum Linear Processing at the Receiver

We first consider optimum linear processing at the receiver. The analysis is similar to that of Section II-B, except that we calculate

$$I_s = \sum_{i=1}^N I_i \quad (24)$$

where  $I_i$  is given in (9), and we have the power constraint of (23). For  $N = 1$ , the results are, of course, identical to those of Section II-B.

For  $N \geq 2$ , we again need to consider the  $P_i$ 's. As in Section II-B, the  $P_i$ 's for maximum total data rate could not be easily determined. Thus, implementation of a system that optimizes the  $P_i$ 's does not appear practical. One practical method, since we are interested in maximizing the total data rate, is to adjust the transmit power of each antenna proportional to its received signal power (similar to the processing method used for optimum linear processing without interference). Thus, the transmit powers are given by

$$P_i = \frac{[\mathbf{C}^\dagger \mathbf{C}]_{ii}}{\sum_{j=1}^N [\mathbf{C}^\dagger \mathbf{C}]_{jj}}. \quad (25)$$

Results, however, show that the maximum total data rate is slightly higher when all the transmit powers are equal, i.e.,  $P_i = 1/N$  ( $i = 1, N$ ). Therefore, in the analysis below, we present results only for equal transmit powers.

For  $N \geq 2$ , the distribution of  $I_s$  was determined by Monte Carlo simulation. For given  $N$ ,  $M$ ,  $\rho$ , and  $P_e$ , the  $I_s$ 's were determined for  $10^4$  randomly generated  $\mathbf{C}$  matrices and the distribution of  $I_s$  was calculated to determine the outage probability.

Now consider the average maximum data rate per channel  $I_s/N$  at a given outage probability. For fixed  $M$ , the signal-to-noise ratio per channel is decreased by  $1/N$  with  $N$  transmit antennas. Thus, it might be expected that the  $\rho$  required for a given  $I_s/N$  would increase linearly with  $N$ . However, there are two other effects. First, as  $N$  increases, the  $I_s/N$  is averaged over more channels, which decreases the  $\rho$  required for a given  $I_s/N$  at a given outage probability. Second, as  $N$  increases, the interference increases, which increases the  $\rho$  required for a given  $I_s/N$ . Which of these two effects dominates depends on  $N$  and  $M$  as shown below.

Fig. 7 shows the average efficiency index per channel ( $I_s/N$ ) versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate, with  $N = 1, 2, 4, 8$  and  $M = 1, 2, 4, 8, 16$ .

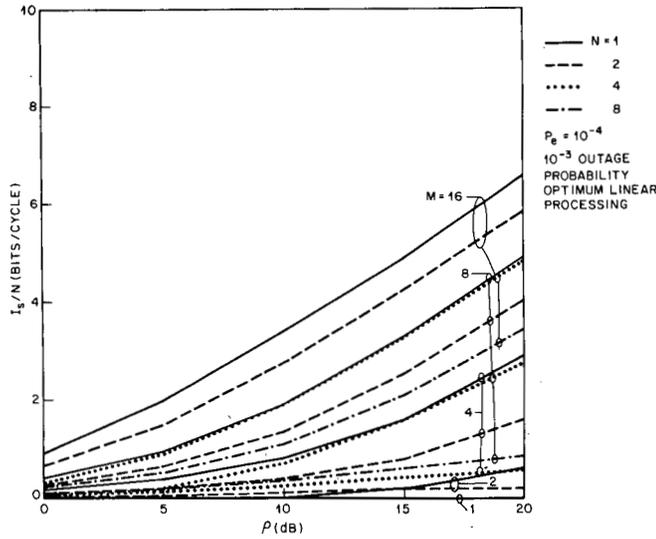


Fig. 7. The average efficiency index per channel versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate for optimum linear processing at one receiver;  $N$  transmitting antennas and  $M$  receiving antennas.

With large  $M/N$ , the averaging effect is seen to dominate. For example, with  $M = 16$ , the  $\rho$  required for a given  $I_s/N$  increases by only 2 dB when  $N$  is increased from 1 to 2. However, as  $N$  increases further, the interference dominates. Thus, with fixed  $M$ , the  $\rho$  required for a given  $I_s/N$  increases linearly with  $N$  for  $N \leq M/2$ , but for  $N = M$ , the required  $\rho$  is much higher. This is because of the greatly increased probability of high cross correlation between  $N$  random signal vectors as  $N$  approaches  $M$ , i.e., for the same reason that in a multiple remote system  $I_i$  is greatly reduced as  $N$  approaches  $M$  (as shown in Fig. 4 and discussed in Section II-B).

### C. Optimum Transmitter/Receiver Processing

We now consider the combining of the input signals prior to transmission. In this case, we are interested in the optimum linear transmitter/receiver processor pair where the processor pair is optimum in the sense of minimizing the total MSE at the receiver output. For given  $C$ , with the jointly optimum  $P$  and  $W$ , the total MSE is of the form [6]

$$\text{MSE} = \sum_{i=1}^N \text{MSE}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \rho \lambda_i P_i} \quad (26)$$

where the  $\lambda_i$ 's are the eigenvalues of  $C^\dagger C$  and

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1. \quad (27)$$

At this point, we could, of course, determine the  $P_i$ 's that minimize the total MSE. However, we wish to maximize the total data rate, which is given by [from (9), (10), and (26)]

$$I_s = \sum_{i=1}^N \log_2 \left( 1 + 1.5 \rho P_i \lambda_i \left/ \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right) \right). \quad (28)$$

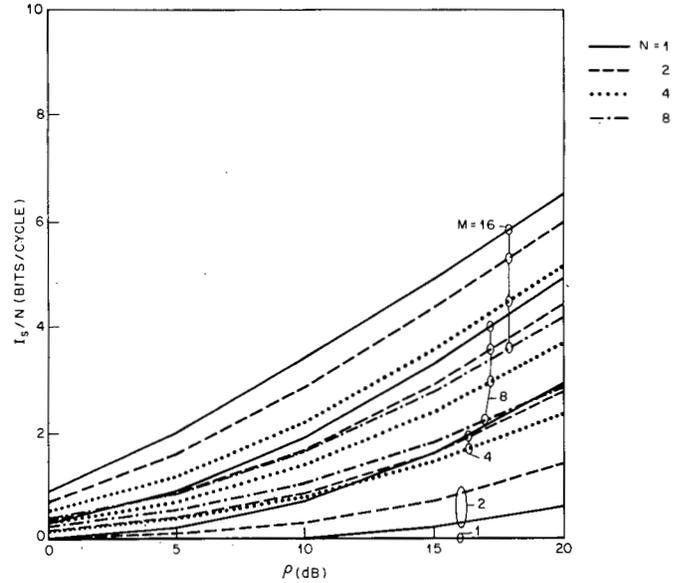


Fig. 8. The average efficiency index per channel versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  error rate for the optimum transmitter/receiver matrix pair;  $N$  transmitting antennas and  $M$  receiving antennas.

The  $P_i$ 's that maximize  $I_s$  can be found by using the water fill analogy [14], i.e.,

$$P_i = \begin{cases} J - \left[ 1.5 \rho \lambda_i \left/ \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right]^{-1} & \text{if } \left[ 1.5 \rho \lambda_i \left/ \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right]^{-1} < J \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

where

$$J = \frac{1}{m} \left( 1 + \sum_i \left[ 1.5 \rho \lambda_i \left/ \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right]^{-1} \right) \quad (30)$$

and the sum is over the  $m$  terms where  $\left[ 1.5 \rho \lambda_i \left/ \left| \ln \frac{P_e}{2} \right| \right]^{-1} < J$ .

Fig. 8 shows the average efficiency index per channel versus  $\rho$  for a  $10^{-3}$  outage probability at a  $10^{-4}$  bit error rate with  $N = 1, 2, 4, 8$  and  $M = 1, 2, 4, 8, 16$ . With fixed  $M$ , the  $\rho$  required for fixed  $I_s/N$  increases by less than 3 dB as  $N$  is doubled. Thus, the averaging effect described in Section III-B dominates for  $N \leq M$ . Note that because of the averaging effect, for  $M = 2$ , the  $I_s/N$  even increases as  $N$  increases from 1 to 2. For  $N < M/2$ , the average efficiency index per channel is similar to that with optimum linear processing at the receiver only. However, for  $N > M/2$ , the  $I_s/N$  is much higher.

Finally, considering implementation of the optimum transmitter/receiver processor pair, we note that to determine the jointly optimum  $P$  and  $W$ ,  $C$  must be known. However, with these matrices, the efficiency index is the same in both transmission directions.

### D. Capacity

Finally, we consider the distribution of the total normalized capacity (Shannon limit) for the channels between the two users. The capacity can be determined by analyzing the independent channels in  $\mathbf{C}$  [4], as in Section II-D. Thus, the total normalized capacity is given by

$$I_s = \sum_{i=1}^N \log_2 (1 + \rho \lambda_i P_i) \quad (31)$$

where  $\lambda_i$  is the  $i$ th eigenvalue of  $\mathbf{C}^\dagger \mathbf{C}$  and  $\sum_{i=1}^N P_i = 1$ . This is the same formula as (28) with  $\rho$  replaced by  $1.5\rho/|\ln(P_e/2)|$ . Thus, Fig. 8 also shows the average normalized capacity power channel at  $\rho' = 1.5\rho/|\ln(P_e/2)|$ . That is, the normalized capacity at  $\rho$  is the same as the maximum data rate for a  $10^{-4}$  error rate without coding at  $\rho + 8.2$  dB.

### IV. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In this paper, we studied, for given outage probability, the maximum data rate (at a given error rate) and the capacity of multiple antenna systems in a Rayleigh fading environment. In such an environment, up to  $M$  independent channels can be established between  $M$  transmit and  $M$  receive antennas. Results show that for a base station with  $M$  antennas, up to  $M/2$  remotes (each with one antenna) can access the base station that uses optimum linear processing, with about the same maximum data rate as a single remote. However, the maximum data rate per remote is much lower with  $M$  remotes. With optimum nonlinear processing at the base station, up to  $M$  remotes can access the base station with about the same maximum data rate as a single remote.

Results for two users, each with  $M$  antennas, show that with optimum linear processing at one receiver, up to  $M/2$  independent channels can be established between the users, with each channel having about the same maximum data rate as a single channel. With the optimum transmitter/receiver processor pair, up to  $M$  channels can be established between the users, with each channel having about the same maximum data rate as a single channel. The capacity (the maximum data rate with an essentially zero error rate) at a given average received signal-to-noise ratio  $\rho$  was shown to be the same as the maximum data

rate without coding at  $1.5\rho/|\ln(P_e/2)|$  ( $\rho + 8$  dB for  $P_e = 10^{-4}$ ).

In summary, we have described and studied the fundamental limits on systems that exploit multipath to allow multiple simultaneous users (or channels) in the same bandwidth. Results show the potential for large capacity in systems with limited bandwidth.

### REFERENCES

- [1] J. H. Winters, "Optimum combining in digital mobile radio with co-channel interference," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. SAC-2, pp. 528-539, July 1984, (also *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-33, pp. 144-155, Aug. 1984).
- [2] —, "Optimum combining for indoor radio systems with multiple users," submitted to *IEEE Trans. Commun.*, also to be presented at ICC '87.
- [3] G. J. Foschini and J. Salz, "Digital communications over fading radio channels," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 62, pp. 429-456, Feb. 1983.
- [4] N. Amitay and J. Salz, "Linear equalization theory in digital data transmission over dually polarized fading radio channels," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 63, pp. 2215-2259, Dec. 1984.
- [5] J. Salz, "Digital transmission over cross-coupled linear channels," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 64, pp. 1147-1159, July-Aug. 1985.
- [6] J. Salz and A. D. Wyner, "On data transmission over cross coupled linear channels," submitted to *IEEE Trans. Commun.*
- [7] R. A. Monzingo and T. W. Miller, *Introduction to Adaptive Arrays*. New York: Wiley, 1980, p. 104.
- [8] W. C. Jakes, Jr., *Microwave Mobile Communications*. New York: Wiley, 1974, p. 319.
- [9] K. H. Awadalla, "Direction diversity in mobile communications," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-30, pp. 121-123, Aug. 1981.
- [10] R. T. Compton, Jr., "On the performance of a polarization sensitive adaptive array," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-29, pp. 718-725, Sept. 1981.
- [11] D. C. Cox, "Antenna diversity performance in mitigating the effects of portable radiotelephone orientation and multipath propagation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-31, pp. 620-628, May 1983.
- [12] W. Van Etten, "Maximum likelihood receiver for multiple channel transmission systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 276-283, Feb. 1976.
- [13] M. L. Steinberger, "Design of a terrestrial cross pol canceller," in *Proc. Int. Conf. Commun.*, Philadelphia, PA, June 1982, pp. 2B.6.1-2B.6.5.
- [14] R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*. New York: Wiley, 1968, p. 344.

Jack H. Winters (S'77-M'82) for a biography and photograph, see this issue, p. 805.

# The Diversity Gain of Transmit Diversity in Wireless Systems with Rayleigh Fading

Jack H. Winters, *Fellow, IEEE*

**Abstract**— In this paper, we study the ability of transmit diversity to provide diversity benefit to a receiver in a Rayleigh fading environment. With transmit diversity, multiple antennas transmit delayed versions of a signal to create frequency-selective fading at a single antenna at the receiver, which uses equalization to obtain diversity gain against fading. We use Monte Carlo simulation to study transmit diversity for the case of independent Rayleigh fading from each transmit antenna to the receive antenna and maximum likelihood sequence estimation for equalization at the receiver. Our results show that transmit diversity with  $M$  transmit antennas provides a diversity gain within 0.1 dB of that with  $M$  receive antennas for any number of antennas. Thus, we can obtain the same diversity benefit at the remotes and base stations using multiple base-station antennas only.

**Index Terms**—Diversity gain, Rayleigh fading, transmit diversity, wireless communications.

## I. INTRODUCTION

THE EFFECT of multipath fading in wireless systems can be reduced by using antenna diversity. In many systems, though, additional antennas may be expensive or impractical at the remote or even at the base station. In these cases, transmit diversity can be used to provide diversity benefit at a receiver with multiple transmit antennas only. With transmit diversity, multiple antennas transmit delayed versions of a signal, creating frequency-selective fading, which is equalized at the receiver to provide diversity gain.

Previous papers have studied the performance of transmit diversity with narrowband signals [1]–[5] using linear equalization, decision feedback equalization, maximum likelihood sequence estimation (MLSE), and spread-spectrum signals [6]–[8] using a RAKE receiver. Monte Carlo simulation results [3], [5] showed that, using MLSE with narrowband signals, the diversity gain with two transmit antennas was similar to that with two receive antennas using maximal ratio combining.<sup>1</sup> However, with three transmit antennas, the diversity gain was less than that of three-antenna receive diversity at high bit-error rates (BER's).

In this paper, we study the diversity gain of transmit diversity with ideal MLSE and an arbitrary number of antennas

Manuscript received May 20, 1994; revised August 3, 1995.

The author is with AT&T Labs—Research, Newman Springs Lab, Red Bank, NJ 07701-7033 USA.

Publisher Item Identifier S 0018-9545(98)00105-4.

<sup>1</sup>Note that with transmit diversity, we obtain a diversity gain against fading because of the different fading channels between each transmit and receive antenna, but do not get the antenna gain of receive diversity, i.e., an  $M$ -fold increase in receive signal-to-noise ratio with  $M$  antennas. With multipath fading, this diversity gain is substantially more than the antenna gain.

and compare the results to receive diversity with maximal ratio combining. We consider binary-phase-shift-keyed (BPSK) modulation with coherent detection and assume independent Rayleigh fading between each transmit antenna and the receive antenna with the delay between the transmitted signals such that the received signals are uncorrelated. This comparison of  $M$ -antenna transmit diversity to receive diversity is shown to be the same as comparing ideal MLSE to the matched filter bound with an  $M$ -symbol-spaced impulse response. With a double impulse response, MLSE can achieve the matched filter bound for all channels [9]. However, with more than a double impulse response, there exist channels for which MLSE cannot achieve the matched filter bound [9]. Using Monte Carlo simulation with Rayleigh fading, we determine the probability distribution of the Euclidean distance between MLSE and the matched filter bound and the resulting degradation in performance. Although this degradation can be several dB for some channel instances,<sup>2</sup> our results show that large degradation occurs with low probability and, when it does occur, is usually on channels with good performance. Therefore, the degradation has little effect on the distribution of the BER with Rayleigh fading. Specifically, our results for 2–30 antennas show that transmit diversity can achieve diversity gains within 0.1 dB of receive diversity. Thus, we can obtain the same diversity benefit at the remotes and base stations using multiple base-station antennas only.

In Section II, we describe transmit diversity and cast the evaluation of performance into a comparison of MLSE to the matched filter bound. We present results for the distribution of the Euclidean distance between MLSE and the matched filter bound in Section III and discuss other issues concerning transmit diversity in Section IV. A summary and conclusions are presented in Section V.

## II. DESCRIPTION OF TRANSMIT DIVERSITY

Fig. 1 shows a block diagram of transmit diversity with  $M$  transmit antennas in a wireless system. The digital signal  $s(t)$  is transmitted by each antenna with a  $D$ -s delay between each antenna. The total transmit power  $P_T$  is equally divided among all antennas, i.e., the transmit power for each antenna is given by

$$P_{T_i} = P_T/M, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1)$$

<sup>2</sup>By channel instance, we mean a sample from the ensemble of channels with independent Rayleigh fading. Although the type of channel we are considering is the Rayleigh fading channel, in the remainder of this paper we will refer to a specific channel instance as a channel.

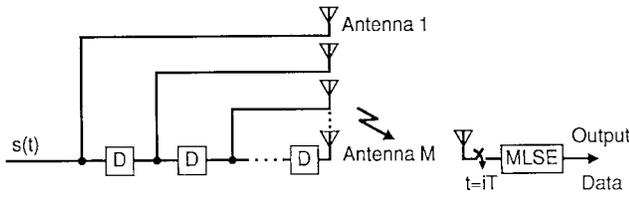


Fig. 1. Block diagram of transmit diversity.

We will assume independent flat Rayleigh fading between each transmit and the receive antenna. Note that the assumption of independent fading between antennas is the same as that required for full diversity gain with receive diversity.

The delay between antennas is chosen so that the signals transmitted by each antenna are uncorrelated, i.e.,

$$E[s(t)s(t+D)] = 0. \quad (2)$$

For our analysis, we will assume that the transmitted symbols are independent and that the transmit and receive filters do not cause intersymbol interference in the received signal. With these assumptions, including the flat fading assumption, a delay of at least one symbol period  $T$  ( $D \geq T$ ) is required for uncorrelated receive signals from each transmit antenna. We therefore will consider the case of  $D = T$ , since a shorter delay results in correlation between the transmitted signals, which reduces the diversity gain of transmit diversity, while a longer delay increases the complexity of the equalizer at the receiver without improving the diversity gain. When delay spread is present in the channel, i.e., without flat fading, a longer delay is needed for uncorrelated received signals. For example, with a delay spread of  $\pm T$ ,  $D \geq 2T$  is needed to achieve uncorrelated signals and the maximum diversity gain at the receiver. Some results of effect of delay on the diversity gain of transmit diversity with delay spread are presented in [2].

At the receiver, white Gaussian noise is added to the received signal, the received signal is sampled at the symbol rate, and the transmitted symbols are determined by MLSE. Here, we consider ideal MLSE, i.e., infinite length MLSE with perfect channel knowledge.

To simplify the problem, let us consider BPSK modulation with coherent detection. Thus, the transmitted signal can be considered as a real binary signal. Our analysis below can be extended to the case of complex multilevel signals (i.e., quadrature amplitude modulation) as well.

With the above assumptions, the transmit diversity system of Fig. 1 can be modeled as the discrete time system (as in [9]) shown in Fig. 2, where the input is an independent binary random sequence  $x = \{x_i\}$  with outcomes  $\pm 1$  equally likely, and the transmitter and channel impulse response (the system response) is given by

$$h = \cdots 00h_0h_1 \cdots h_{M-1}00 \cdots, \quad (3)$$

With independent Rayleigh fading, the  $h_i$ 's,  $i = 0, \dots, M-1$ , are independent complex, Gaussian random variables with zero mean and variance  $P_T/M$ . The noise  $n = \{n_i\}$  is a sequence of independent complex Gaussian random variables with zero

mean and variance  $N_0$ . The sequence input to MLSE  $y = \{y_i\}$  is then  $y = x * h + n$ , where  $*$  denotes convolution.

With MLSE, the BER for a given channel is approximately given by the probability of minimum distance error events [10]. This approximation is accurate at least for low BER's. Specifically, the BER is given by [10]

$$\text{BER} \approx 1/2 \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{d_{\min}^2}{N_0}} \right) \quad (4)$$

where the minimum distance over all possible error events is given by

$$d_{\min}^2 = \min_{\epsilon} \|h * \epsilon\|^2. \quad (5)$$

In (5),  $\|\cdot\|^2$  denotes the  $l_2$  norm (sum of the squares of the elements) and

$$\epsilon = \cdots 00\epsilon_0 \cdots \epsilon_l 00 \cdots, \epsilon_k = \pm 1 \quad (6)$$

denotes an error event of length  $l$ , where  $\epsilon_k$  is the  $k$ th error symbol.

Since there are an infinite number of possible error sequences, to determine the sequence with  $d_{\min}$ , we must use a search technique that limits the number of error sequences to be examined. One such technique, using tree pruning, is described in [11]. That paper considers real binary (as well as multilevel) signals with real channels rather than complex channels. Therefore, we modified the program used in [11] for complex channels. In addition, we eliminated the "half test," which assumed a symmetrical impulse response, which we do not have, in general. Eliminating this test greatly increased computation time, but even with  $M = 30$ , the program took less than 1 min on a SPARC10 to find the minimum distance for a given channel.

Now, the matched filter bound for this system is the squared distance of an isolated single bit-error event. Thus, from (5), this distance is given by

$$d_{\min|_{\text{MFB}}}^2 = \sum_{i=0}^{M-1} |h_i|^2. \quad (7)$$

Since this is also the output signal power with maximal ratio combining [12], the performance of the matched filter bound is the same as receive diversity, except for the reduction in gain by  $M$ . This reduction in gain by  $M$  is due to the fact that for receive diversity, there are  $M$  independent sources of noise, whereas with a matched filter, there is only one source of noise. Thus, for a given channel, the degradation in the performance of MLSE as compared to receive diversity is<sup>3</sup>

$$\text{Degradation} = \frac{d_{\min|_{\text{MLSE}}}^2}{d_{\min|_{\text{MFB}}}^2}. \quad (8)$$

<sup>3</sup>It should be emphasized that (8) is the degradation when the receive and transmit channels are the same. Thus, (8) is not the degradation that would be obtained, for a given channel with receive diversity, by replacing receive diversity with transmit diversity since, in general, the channels would differ. However, this performance measure is useful to show why the performance (diversity gain) distribution with transmit diversity is virtually the same as that with receive diversity when considering all possible channels. Also, note that this definition of the degradation is consistent with [10, p. 405]. Note that the degradation is large when the ratio (8) is small, and  $10 \log \{\text{Degradation}\}$  becomes more negative as the degradation increases.

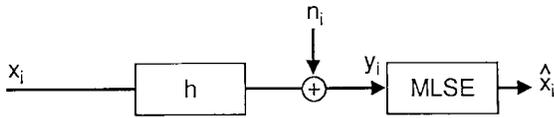


Fig. 2. Discrete time model of transmit diversity.

Since the channel response is a random variable,  $d_{\min}^2$  and the degradation are also random variables. Note that with flat Rayleigh fading, the probability distribution of  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$ , normalized to the mean  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$  (averaged over the fading), is given by [12]

$$P(x) = 1 - e^{-x/M} \sum_{k=1}^M \frac{(x/M)^{k-1}}{(k-1)!} \quad (9)$$

where

$$x = \frac{d_{\min}^2|_{\text{MFB}}}{E[d_{\min}^2|_{\text{MFB}}]} \quad (10)$$

Below, we examine the distribution of the degradation and determine its effect by comparing the distribution of  $d_{\min}^2|_{\text{MLSE}}$  to that of  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$  (9).

### III. RESULTS

For  $M = 2$ , [9] showed that the MLSE receiver can achieve the matched filter bound for any flat fading channel. Thus, transmit diversity with MLSE can have the same diversity gain as receive diversity. For  $M = 3$ , though, [5] stated that there was some degradation in performance with transmit diversity as compared to receive diversity. Indeed, [9] showed that for  $M \geq 3$ , there exist real channels (and therefore complex channels as well) for which the matched filter bound, and thus the diversity gain of receive diversity, cannot be achieved. The degradation for the worst real channel is 2.3, 4.2, 5.7, and 7.0 dB for  $M = 3, 4, 5,$  and  $6$ , respectively [10]. Since we have complex channels, our worst case channels may have even higher degradation (although none were found). Thus, the worst case degradation grows with  $M$  and can exceed the diversity gain, especially at high BER's. However, because the channel is random, these worst case channels, and those channels for which MLSE cannot achieve the matched filter bound, occur with some probability.

To determine the probability distribution of this degradation, we used Monte Carlo simulation. For given  $M$ , we generated 10000 random channels, where each channel consisted of  $M$   $T$ -spaced impulses with each impulse having an amplitude that was a randomly generated complex Gaussian number. For each channel, we used the modified program of [11] to determine the minimum Euclidean distance over all possible error sequences and compared this distance to that of the matched filter bound.

Fig. 3 shows the probability distribution of the minimum Euclidean distance (squared) as compared to that of the matched filter bound ( $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$ ). Results are shown for  $M = 3, 4, 6, 10, 20,$  and  $30$ . The probability that MLSE cannot achieve the matched filter bound on a given channel is less than 9% for  $M = 3$ . This probability decreases with  $M$ , such that,

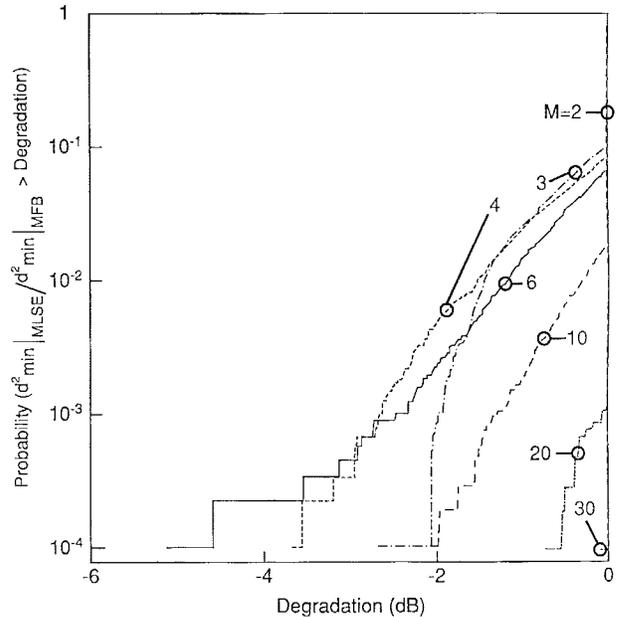


Fig. 3. Probability distribution of the degradation of the diversity gain with MLSE versus the matched filter bound.

for  $M = 30$  in the simulation, MLSE achieved the matched filter bound in all but one channel out of 10000.

For  $M = 3$ , the worst case degradation is seen to be sharply limited to 2.2 dB, which is close to the 2.3 degradation for the worst real channel [9]. For  $M = 4$  and  $6$ , the worst degradation seen with 10000 random channels was 3.6 and 5.2 dB, respectively, (2.4 and 2.6 dB, respectively, at a  $10^{-3}$  probability), which is significantly less than the worst possible degradation for real channels of 4.2 and 7.0 dB, respectively. As  $M$  increases to 10, 20, and 30, the probability of large degradation is shown to decrease (at least for probabilities greater than  $10^{-4}$ ). At  $M = 30$ , only one channel out of the 10000 random channels had any degradation, and its degradation was only 0.1 dB. Thus, as  $M$  increases, although the worst case degradation increases, the probability of worst case degradation decreases.

Next, consider the effect of this degradation on the average BER and the distribution of the BER. Because the degradation has low probability, the effect of the degradation on the average BER is negligible. Thus, in rapidly fading environments, where the average BER is of interest, transmit diversity can achieve the full diversity gain of receive diversity. However, in stationary or slow-fading wireless systems, the effect of the degradation on the distribution of the BER must be considered. The effect of the degradation with MLSE on the probability distribution of the BER depends on the  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$  for each channel where the degradation occurs. If this degradation is large only for channels with large  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$ , then the probability distribution of the BER with MLSE will not be significantly different from that of the BER with the matched filter bound. But if channels with large degradation also have low  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$ , then the degradation could significantly affect the probability distribution of the BER.

To determine the effect of this degradation on the performance, we used Monte Carlo simulation, as before,

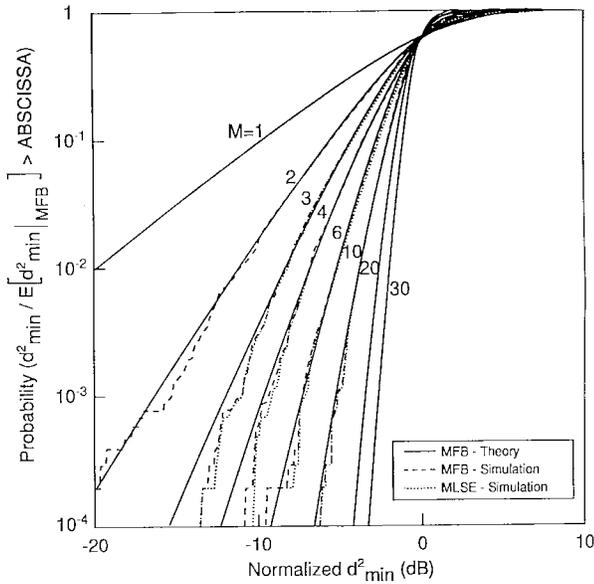


Fig. 4. Probability distribution of the normalized  $d_{\min}^2$  with the diversity gain of transmit diversity and MLSE compared to that of receive diversity.

with 10000 randomly generated channels and compared the probability distribution of the minimum Euclidean distance (squared) of the matched filter bound to that of MLSE. The same channels were used for both the matched filter bound and MLSE.

Fig. 4 shows the probability distribution of  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$  and  $d_{\min}^2|_{\text{MLSE}}$  generated by Monte Carlo simulation, along with theoretical results for  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$  (9). Computer simulation results are seen to closely match theoretical results for probabilities down to  $10^{-2}$ . For  $M = 2$ , simulation results for MLSE are identical to those for the matched filter bound, while for  $M \geq 3$ , simulation results for MLSE differ by less than 0.1 dB from those for the matched filter bound. These results show that the channels for which MLSE cannot achieve the matched filter bound are generally not the channels with low  $d_{\min}^2|_{\text{MFB}}$ . Thus, the degradation with MLSE does not significantly affect the probability distribution of the output BER, i.e., transmit diversity with MLSE has within 0.1 dB of the diversity gain of receive diversity, even in stationary environments.

#### IV. OTHER ISSUES

Let us first compare transmit diversity to other techniques that provide diversity at a receiver using multiple transmit antennas only. These techniques include switched diversity with feedback [13] and adaptive retransmission [14]–[17]. With switched diversity with feedback, the transmit antenna is switched when the receiver indicates, using feedback to the transmitter, that the received signal has fallen below a threshold. The advantage of this technique over the transmit diversity technique described in this paper is that the receiver and transmitter are much simpler. However, the disadvantage is that the diversity gain is only that of selection diversity, rather than maximal ratio or optimum combining. This gain is further decreased with processing and propagation delay, which becomes worse with rapid fading. With adaptive retrans-

mission, the multiple-antenna base transmits with the same antenna pattern as that used for reception. The advantages of this technique are that the technique is easy to implement and antenna gain is obtained. However, for the technique to work properly, either the transmit and receive frequencies must be within the coherence bandwidth (which is not true in most wireless systems), or time-division retransmission (different time slots in the same channel are used for receiving and transmitting) must be used. With time-division retransmission, which doubles the data rate in the channel, the time slot must be short enough so that the fading does not change significantly over the time slot, and this is not always possible. For example, in a system with characteristics similar to the North American digital mobile radio standard IS-54 (24.3 k symbols per s with an 81-Hz fading rate), adaptive retransmission with time division is not practical [17].

Transmit diversity also has the advantage that it can be used to obtain diversity gain at multiple remotes (for point-to-multipoint transmission) with a single transmitted signal. The other methods can only be used for diversity gain at one remote.

Transmit diversity is also useful in systems with multiple transmit *and* receive antennas. In this case, the total number of independent fading channels can be  $M_T \cdot M_R$  [18], where  $M_T$  and  $M_R$  are the number of transmit and receive antennas, respectively. Here, transmit diversity can be used with receive diversity to achieve a large  $M_T M_R$ -fold diversity gain with only a few antennas at the base and remote.

Also, here we have only considered the diversity gain against multipath fading, whereas multiple antennas can be used to suppress interference as well. Indeed, increasing the diversity beyond two or three usually provides little performance improvement against fading, but substantial improvement against cochannel interference [15]–[17], [19]. Interference suppression with fading mitigation using transmit diversity will be studied in a future paper.

However, since transmit diversity with  $M$  antennas results in  $M$  sources of interference to other users, the interference environment will be different from conventional systems with one transmit antenna. Thus, even if transmit diversity has almost the same performance as receive diversity in noise-limited environments, the performance in interference-limited environments will differ. Also, in our simulations we have considered ideal MLSE with perfect channel estimation. In practice, when increasing the number of antennas, at some point the degradation due to channel estimation error may become greater than the increase in diversity gain. Note also that this channel estimation error may increase with the number of transmit antennas since the transmit power is divided among the transmit antennas (1). In addition, if the channel is dispersive, the diversity gain for the same number of transmit antennas will increase (with ideal MLSE and perfect channel estimation), although the required complexity of the MLSE also increases. Finally, note that for systems with highly elevated base-station antennas, the required antenna separation for uncorrelated channels in the downlink is greater with transmit diversity at the base station than with receive diversity at the remote.

## V. CONCLUSION

In this paper, we studied the diversity gain of transmit diversity with ideal MLSE and an arbitrary number of antennas. We considered BPSK modulation with coherent detection and independent Rayleigh fading between each transmit antenna and receive antenna, with the delay between the transmitted signals such that the received signals are uncorrelated. Using Monte Carlo simulation with Rayleigh fading, we determined the probability distribution of the performance of MLSE. Our results for 2–30 antennas show that transmit diversity can achieve diversity gains within 0.1 dB of receive diversity. Thus, we can obtain the same diversity benefit at the remotes and base stations using multiple base-station antennas only.

## ACKNOWLEDGMENT

The author gratefully acknowledges helpful discussions with G. J. Foschini and G. Vannucci and thanks G. Vannucci for providing the programs used in [11].

## REFERENCES

- [1] P.-E. Ostling, "Performance of MMSE linear equalizer and decision feedback equalizer in single-frequency simulcast environment," in *Proc. 43rd IEEE Vehicular Technology Conf.*, May 18–20, 1993, pp. 629–632.
- [2] P. E. Mogensen, "GSM base-station antenna diversity using soft decision combining on up-link and delayed-signal transmission on down-link," in *Proc. 43rd IEEE Vehicular Technology Conf.*, May 18–20, 1993, pp. 611–616.
- [3] N. Seshadri and J. H. Winters, "Two signaling schemes for improving the error performance of frequency-division-duplex (FDD) transmission systems using transmitted antenna diversity," *Int. J. Wireless Information Networks*, vol. 1, no. 1, pp. 49–60, Jan. 1994.
- [4] A. Wittneben, "Base station modulation diversity for digital SIMULCAST," in *41st IEEE Vehicular Technology Soc. Conf. Proc.*, pp. 848–853.
- [5] ———, "A new bandwidth efficient transmit antenna modulation diversity scheme for linear digital modulation," in *Proc. IEEE Int. Conf. Communications*, May 23–26, 1993, pp. 1630–1634.
- [6] A. J. Viterbi and R. Padovani, "Implications of mobile cellular CDMA," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 30, pp. 38–41, Dec. 1992.
- [7] R. Esmailzadeh and M. Nakagawa, "Pre-RAKE diversity combination for direct sequence spread spectrum communications systems," in *Proc. IEEE Int. Conf. Communications*, May 23–26, 1993, pp. 463–467.

- [8] V. Weerackody, "Diversity for the direct-sequence spread spectrum system using multiple transmit antennas," in *Proc. IEEE Int. Conf. Communications*, May 23–26, 1993, pp. 1775–1779.
- [9] R. R. Anderson and G. J. Foschini, "The minimum distance for MLSE digital data systems of limited complexity," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-21, no. 5, pp. 544–551, 1975.
- [10] J. G. Proakis, *Digital Communications*. New York: McGraw-Hill, 1983.
- [11] G. Vannucci and G. J. Foschini, "The minimum distance for digital magnetic recording partial responses," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 37, no. 3, pp. 955–960, 1991.
- [12] W. C. Jakes, Jr. et al., *Microwave Mobile Communications*. New York: Wiley, 1974.
- [13] J. H. Winters, "Switched diversity with feedback for DPSK mobile radio systems," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-32, pp. 134–150, Feb. 1983.
- [14] D. C. Cox, "Time division adaptive retransmission for reducing signal impairments in portable radiotelephones," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-32, pp. 230–238, Aug. 1983.
- [15] J. H. Winters, "Optimum combining in digital mobile radio with cochannel interference," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. SAC-2, no. 4, pp. 528–539, 1984.
- [16] ———, "Optimum combining for indoor radio systems with multiple users," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-35, no. 11, pp. 1222–1230, 1987.
- [17] J. H. Winters, J. Salz, and R. D. Gitlin, "The impact of antenna diversity on the capacity of wireless communication systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, nos. 2/3/4, pp. 1740–1751, Apr. 1994.
- [18] J. H. Winters, "On the capacity of radio communication systems with diversity in a Rayleigh fading environment," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. SAC-5, no. 5, pp. 871–878, 1987.
- [19] ———, "Signal acquisition and tracking with adaptive arrays in the digital mobile radio system IS-54 with flat fading," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 42, pp. 377–384, Nov. 1993.



**Jack H. Winters** (S'77–M'81–SM'88–F'96) received the B.S.E.E. degree from the University of Cincinnati, Cincinnati, OH, in 1977 and the M.S. and Ph.D. degrees in electrical engineering from Ohio State University, Columbus, in 1978 and 1981, respectively.

Since 1981, he has been with AT&T Bell Laboratories and is now with AT&T Labs—Research, where he is in the Wireless Systems Research Department. He has studied signal-processing techniques for increasing the capacity and reducing signal distortion in fiber optic, mobile radio, and indoor radio systems and is currently studying adaptive arrays and equalization for indoor and mobile radio.